

Frazioniamoci inclusivamente... con il progetto



Anna Baccaglini-Frank, Alessandro Ramploud – Università di Pisa

Silvia Funghi – Università di Genova

16 maggio 2024 - Baccaglini-Frank, Funghi & Ramploud



Introduzione

Anna Baccaglini-Frank

16 maggio 2024 - Baccaglini-Frank, Funghi & Ramploud

Alcuni esempi* da esperienze nostre o di colleghi

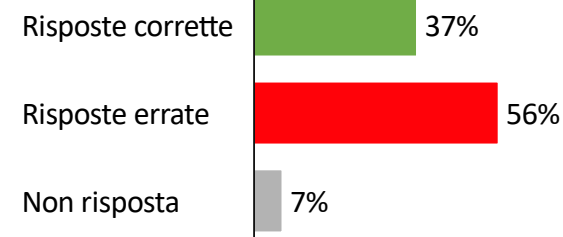
*(queste studentesse e questi studenti non hanno lavorato con PerContare)

Un quesito INVALSI

D25. Osserva le seguenti rappresentazioni di numeri.

50% $\frac{1}{2}$ 0,2 $\frac{5}{10}$

Cerchia tutte quelle che rappresentano lo stesso numero.



Un quesito INVALSI

D25. Osserva le seguenti rappresentazioni di numeri.



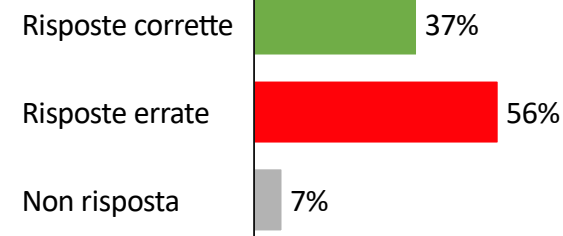
$$\frac{1}{2}$$

0,2

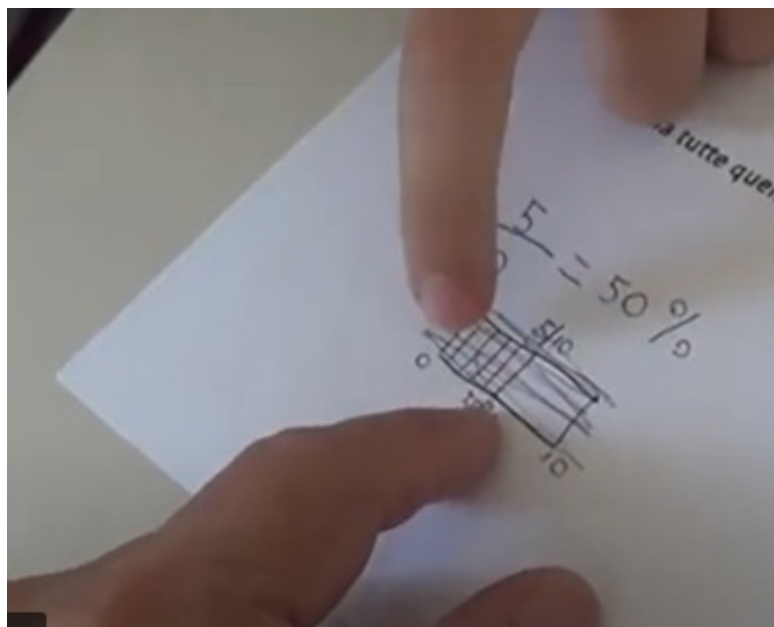


T: cinquanta per cento e cinque decimi

Cerchia tutte quelle che rappresentano lo stesso numero.



Difficoltà con le frazioni



T: Perché non sono proprio lo stesso numero, cioè la stessa cosa.

I: La stessa cosa, e perché?

T: L'ho fatto anche qua [...] questo è come cinque decimi

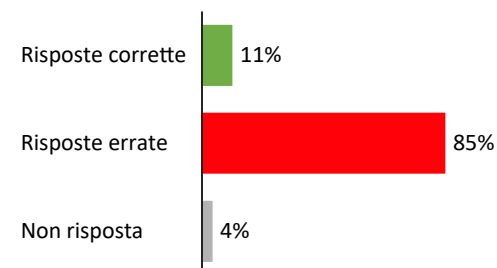
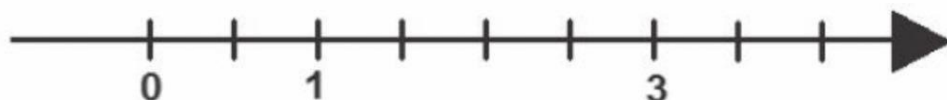
[...]

I: Quindi entrambi sono un mezzo. Rappresentano la stessa cosa.

T: No. Cinque decimi sono tutti questi [indica le parti]; $1/2$ non è diviso.

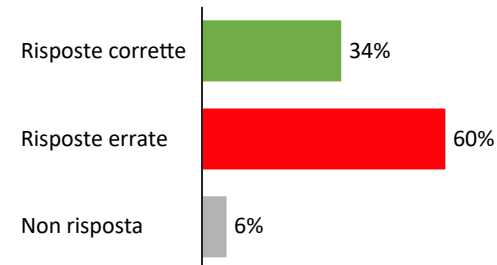
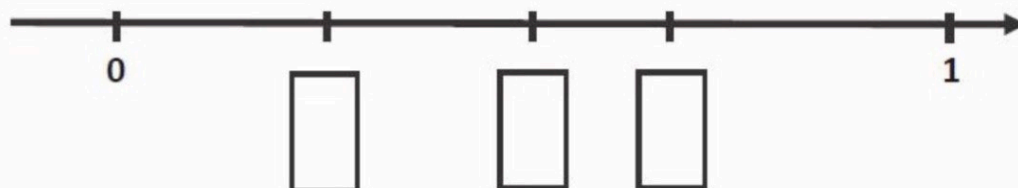
D8. Posiziona sulla retta i seguenti numeri:

2 2,5 $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{10}$

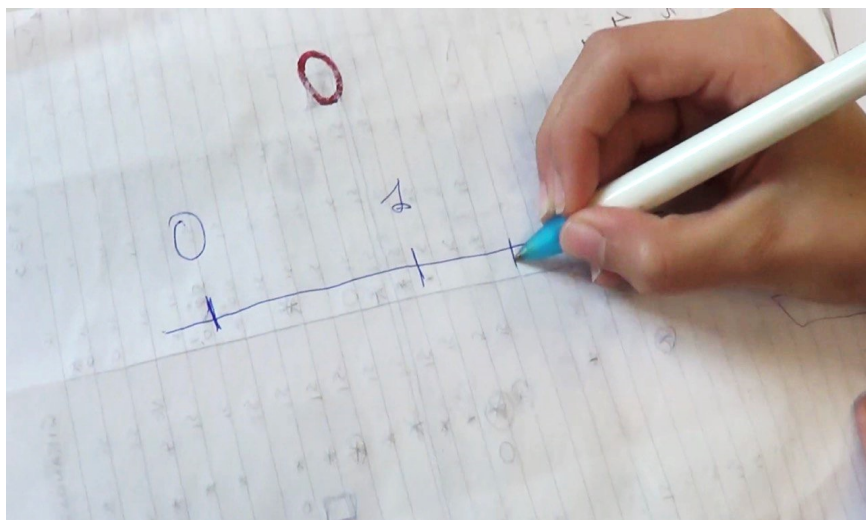


D12. Scrivi nei riquadri i seguenti numeri, posizionandoli correttamente sulla retta.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$



Difficoltà con le frazioni



I: Un mezzo dove lo metteresti?

C: Qui. *(indica a colpo sicuro il punto centrale tra 1 e 2)*

I: E $\frac{5}{10}$?

C: *(pausa)* Qua non... *(fa un gesto con la mano che indica la lunghezza della retta disegnata)*

I: Non ci sta qua? Ci vuole più a destra?

C: *(annuisce)*

I: Allora $\frac{5}{10}$ non è uguale a un mezzo?

C: È la metà, sì... 5 è la metà di 10.

Difficoltà con le frazioni

T: Trasforma in frazione questo numero decimale: 8,2

F: *(applicando la regola sulla pagina aperta del libro scrive)* $\frac{82}{10}$. Ho messo tanti zeri quante le cifre dopo la virgola, ma è sbagliato *(guarda il risultato dato dal libro)*.

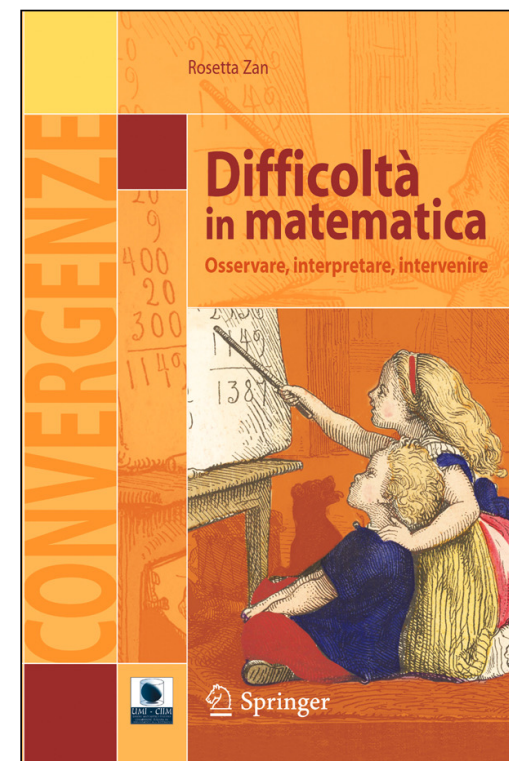
I: Eh, puoi trasformarla in una frazione equivalente?

F: *(pausa)* uh... tipo «(82, 10)»?

Davanti a risposte così, che cosa pensiamo?
Che cosa facciamo?

L'approccio tradizionale prevede che si passi immediatamente a interventi che prevedono:

- correggere gli errori
- mostrare come si deve fare
- rispiegare gli argomenti
- mettere in guardia da errori «tipici»

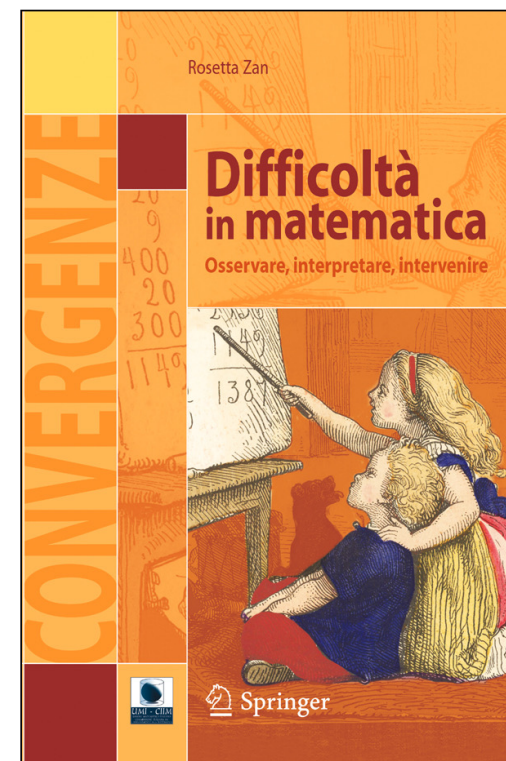


Davanti a risposte così, che cosa pensiamo?
Che cosa facciamo?

L'approccio tradizionale si rifà alla metafora della medicina:

- difficoltà → malattia
- recupero → cura
- errori → sintomi

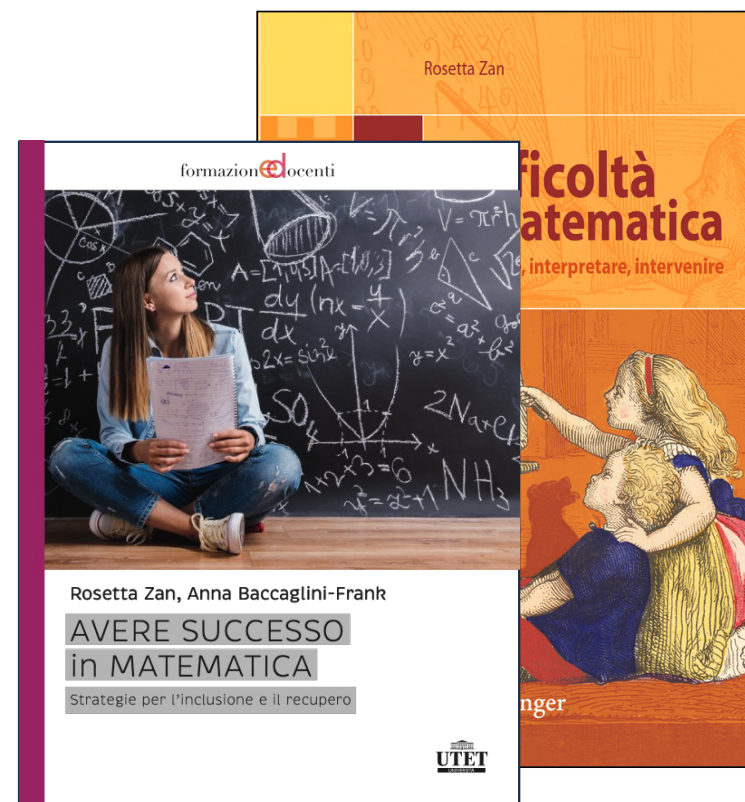
Bisogna «guarire» attaccando i «sintomi» (gli errori)



Davanti a risposte così, che cosa pensiamo?
Che cosa facciamo?

Invece dovremmo lavorare di più
sull'interpretazione degli errori, anche alla
luce dei risultati della ricerca.

Abbiamo bisogno di avere un repertorio di
interpretazioni possibili.



Esempi dalla ricerca (che ci fornisce strumenti per interpretare)

Esempio Benny

Benny è un allievo di prima media che partecipa ad un programma scolastico individualizzato (Individually Prescribed Instruction) di stampo comportamentista: il passaggio da una sequenza a quella successiva del programma dipende dal fatto che l'allievo dimostri di dare le risposte attese.

Benny è considerato dal suo insegnante uno dei più bravi in matematica.

Benny, nella maggior parte dei calcoli con le frazioni (somma e prodotto) riesce a dare le risposte esatte.

Fa qualche errore strano, ad esempio $\frac{1}{2} + \frac{2}{1} = 1$

Dalle interviste con il ricercatore emerge come Benny veda la somma di frazioni come dipendente dal denominatore (tante regole diverse, a seconda del denominatore).

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(2), 7-26.

Esempio Benny

Benny credeva che ci fossero regole per diversi tipi di frazioni, come illustrato dal seguente estratto:

B: con le frazioni abbiamo 100 diversi tipi di regole. . .

E: Saresti in grado di dire le 100 regole?

B: Sì . . . Forse, ma non tutte.

Era in grado di enunciare le regole di addizione per le frazioni in modo abbastanza chiaro da permettermi di giudicare che dipendevano dai denominatori delle frazioni ed erano equivalenti alle seguenti:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{a}{10} + \frac{b}{100} = \frac{a+b}{110}$$

tradotto liberamente da Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(2), 7-26.

Esempio Benny

Quando l'intervistatore gli chiede come mai afferma che $\frac{2}{1} + \frac{1}{2} = 1$.

Benny sembra rifarsi alla sua regola $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ (quindi $\frac{2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{3} = 1$),

inoltre spiega che $\frac{2}{1} + \frac{1}{2}$ è «proprio come dire $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ perché $\frac{2}{1}$, inverti, $\frac{1}{2}$.

Quindi ne uscirà un tutt'uno, non importa in quale modo. 1 è 1.»

Il successo di Benny è legato alla sua capacità di ri-adattare i propri algoritmi alla sequenza specifica affrontata, per ottenere le risposte corrette, ma senza una reale comprensione.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(2), 7-26.

Esempio Benny

L'articolo è cruciale perché mette in crisi la significatività di un programma educativo (IPI) basato sul modello comportamentista.

Mostra un nuovo modo di far ricerca in educazione matematica, basato sull'analisi di un *case study*, e la cui metodologia prevalente è l'intervista.

Porta alla luce il ruolo delle convinzioni (*beliefs*) degli allievi nel fare matematica.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(2), 7-26.

Esempio Benny

Questo esempio mostra:

che Benny si è costruito delle strategie risolutive: ogni volta che osserviamo un errore da parte dei bambini, ci stanno offrendo degli elementi che indicano l'attivazione di un qualche tipo di strategia (anche quando rispondono a caso)

che i problemi a risposta chiusa, quando non accompagnati da ulteriori richieste di spiegazione e/o argomentazione, possono generare nelle bambine e nei bambini la ricerca della «risposta corretta» e del «prodotto» che immaginano sia loro richiesto e non un'attenzione al processo o ai «perché»; possono inoltre «mascherare» misconcezioni

che se le «regole» e le procedure non sono sostenute da una opportuna costruzione di significati matematici, per i bambini diventa impossibile distinguere una procedura con significato da una procedura senza significato

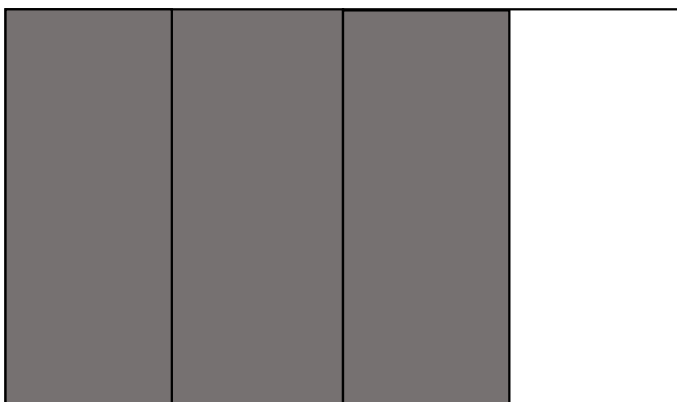
che i bambini possono spesso applicare sistematicamente procedure interpretate male, piuttosto che sbagliare occasionalmente procedure corrette.

Esempio Lisa e Emily

Lisa ed Emily sono due studentesse di secondaria di secondo grado (16-18 anni) con DSA diagnosticato, che intraprendono un percorso di recupero sulle frazioni mutuato da un percorso di recupero rivolto a studenti con difficoltà di classe V primaria.

L'intervento si basa sull'uso e interpretazione di una specifica rappresentazione della frazione come parte-tutto.

Per es., la frazione $\frac{3}{4}$ è rappresentata da:



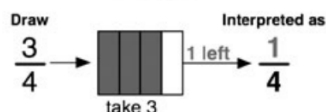
Questo modo di rappresentare le frazioni era stato spiegato e sintetizzato in «regole» che le studentesse potevano sempre consultare attraverso appunti scritti.

Nonostante questo, però, Lisa e Emily si mostrano particolarmente «resistenti» all'intervento...

Lewis, K. E. (2014). Difference not deficit: Reconceptualizing mathematical learning disabilities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(3), 351-396.

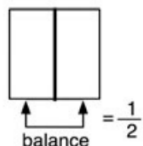
Le “comprensioni persistenti” di Lisa e Emily

L1 Taking

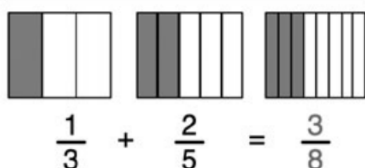


Interpreted as $\frac{1}{4}$

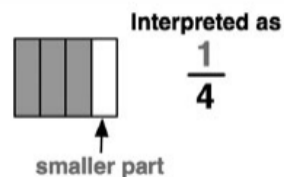
L2 One-Half as Balance



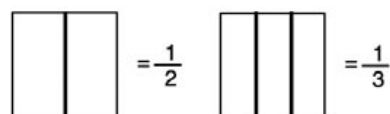
L3 Discrete Set



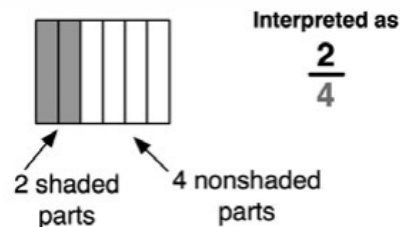
E1 Smaller Part



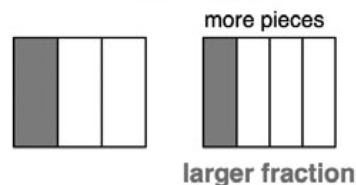
E2 Quantity as Partitions



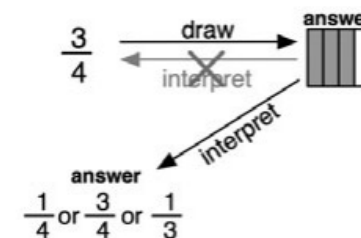
E3 Part-Part



E4 More Pieces



E6 Representation as answers



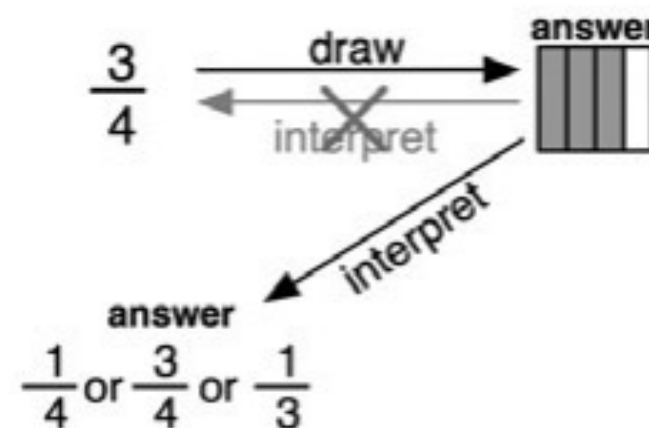
Lewis, K. E. (2014). Difference not deficit: Reconceptualizing mathematical learning disabilities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(3), 351-396.

Riflessioni a partire dall'esempio Lisa e Emily

Dare "una sola" rappresentazione
"convenzionale" di un concetto matematico può
creare difficoltà, in quanto:

- Una rappresentazione è interpretabile attraverso diversi significati matematici
- L'interpretazione che lo studente dà della rappresentazione non è detto che sia coerente con quella voluta (anche se è stata "spiegata" più volte)
- Interventi di potenziamento/recupero che fanno leva sull'unicità di queste rappresentazioni possono risultare non efficaci

E6 Representation as answers



Lewis, K. E. (2014). Difference not deficit: Reconceptualizing mathematical learning disabilities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(3), 351-396.

Riflessioni a partire dall'esempio Lisa e Emily

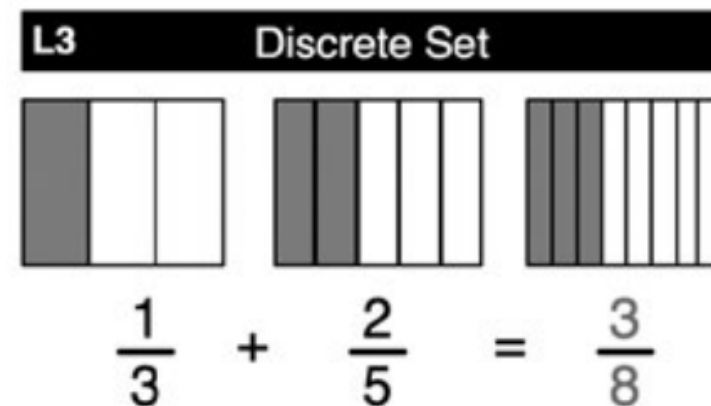
Errore "classico" che si osserva alla scuola primaria e secondaria di I grado.

Di solito avviene perché si generalizzano le proprietà dei numeri naturali sulle frazioni, a livello di registro simbolico.

È una particolare rappresentazione "standard" di frazione come parte-tutto che sembra supportare quel tipo di generalizzazione

In effetti, c'è una diversa accezione dell'espressione "parti uguali" nel linguaggio naturale rispetto a equiestensione e congruenza.

La rappresentazione può lasciare "opaco" il significato di "mettere insieme" due diverse parti rispetto allo stesso intero di riferimento.



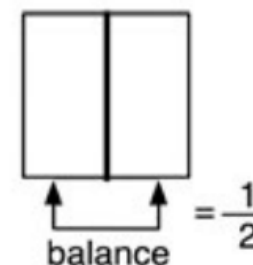
Lewis, K. E. (2014). Difference not deficit: Reconceptualizing mathematical learning disabilities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(3), 351-396.

Riflessioni a partire dall'esempio Lisa e Emily

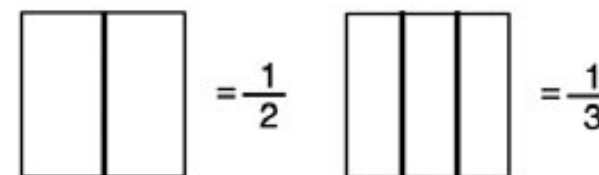
Alcuni errori possono segnalare la presenza di interpretazioni non del tutto errate delle rappresentazioni in gioco (un mezzo come "dividere/tagliare a metà"), ma che non supportano una costruzione coerente del senso di altri significati matematici (in questo caso somma di frazioni).

Le rappresentazioni non sempre rimandano a contesti che permettono agli studenti di costruire un senso ai significati matematici in gioco.

L2 One-Half as Balance



E2 Quantity as Partitions



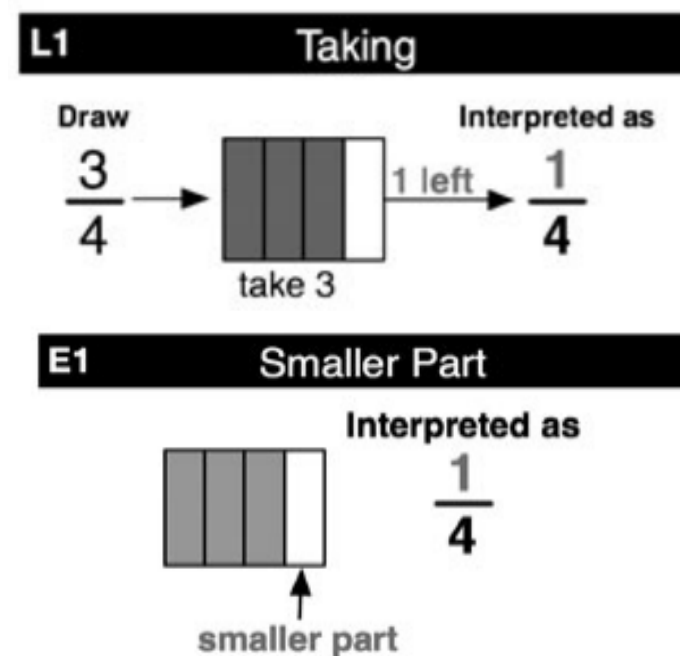
Lewis, K. E. (2014). Difference not deficit: Reconceptualizing mathematical learning disabilities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(3), 351-396.

Riflessioni a partire dall'esempio Lisa e Emily

Anche elementi che vengono ritenuti «facilitatori» (come il colore) possono supportare interpretazioni della rappresentazione non del tutto coerenti con il significato matematico che si vuole veicolare.

Le differenze cromatiche, l'assenza di colore, la dimensione o l'orientamento delle parti, etc. possono essere percepite/interpretate in modi non convenzionali.

Non è detto che il comportamento del singolo studente sia «coerente» rispetto ad un solo tipo di interpretazione (e/o a quello dell'esperto) della rappresentazione.



Lewis, K. E. (2014). Difference not deficit: Reconceptualizing mathematical learning disabilities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(3), 351-396.

Esempio Lisa e Emily

Questo esempio mostra:

che Lisa ed Emily mettono in atto «spontaneamente» delle interpretazioni non convenzionali: ogni volta che osserviamo un errore da parte degli studenti, ci stanno offrendo degli elementi che ci possono permettere di capire come stanno capendo e pensando alla domanda posta loro

il comportamento di un singolo studente può dipendere di volta in volta da interpretazioni diverse della stessa rappresentazione

non è detto che rappresentazioni convenzionali o «semplici» (secondo l'insegnante o alcuni studenti) garantiscano accessibilità per tutti ad un certo significato matematico

non sempre basta «spiegare» per ottenere un cambiamento (e soprattutto per assicurarsi la comprensione), anche se la spiegazione è stata fatta a monte

Perché le frazioni sono difficili?

Qual è la loro relazione con i numeri naturali?

In quali modi si può rappresentare una frazione?

Che cos'è una frazione?

Quali relazioni ci sono fra frazioni e numeri decimali?

Quali relazioni ci sono tra frazioni e percentuali?

Quali relazioni ci sono tra frazioni e probabilità?

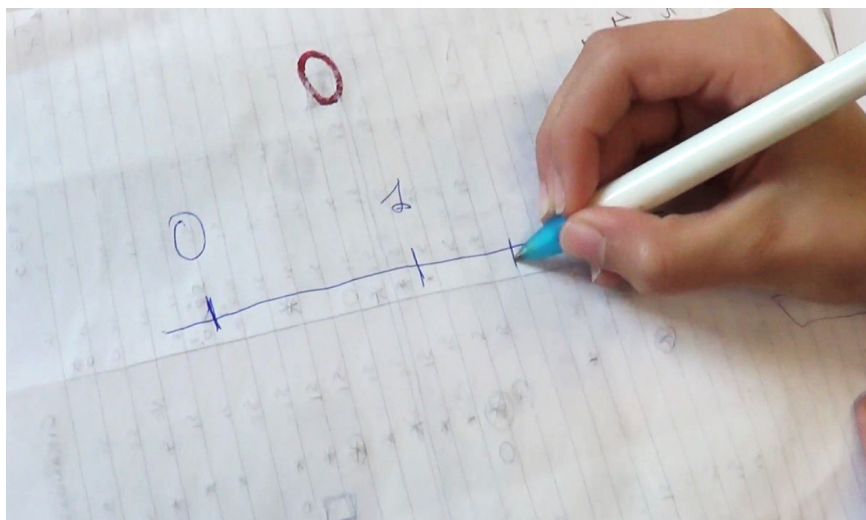
...

Perché le frazioni sono difficili?

Molte difficoltà derivano dall'**errata generalizzazione di alcune proprietà** dei numeri naturali:

- Nell'insieme delle frazioni, **non posso stabilire univocamente la frazione precedente e la successiva** di una frazione data;
- Il **risultato della moltiplicazione** di un numero per una frazione non è necessariamente un numero maggiore di quello di partenza
- La stessa frazione può essere rappresentata da **scritture simboliche diverse** (frazioni equivalenti)

Difficoltà con le frazioni



I: Un mezzo dove lo metteresti?

C: Qui. *(indica a colpo sicuro il punto centrale tra 1 e 2)*

I: E $\frac{5}{10}$?

C: *(pausa)* Qua non... *(fa un gesto con la mano che indica la lunghezza della retta disegnata)*

I: Non ci sta qua? Ci vuole più a destra?

C: *(annuisce)*

I: Allora $\frac{5}{10}$ non è uguale a un mezzo?

C: È la metà, sì... 5 è la metà di 10.

Difficoltà con le frazioni

T: Trasforma in frazione questo numero decimale: 8,2

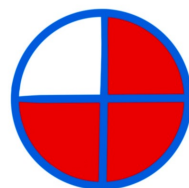
F: *(applicando la regola sulla pagina aperta del libro scrive)* $\frac{82}{10}$. Ho messo tanti zeri quante le cifre dopo la virgola, ma è sbagliato *(guarda il risultato dato dal libro)*.

I: Eh, puoi trasformarla in una frazione equivalente?

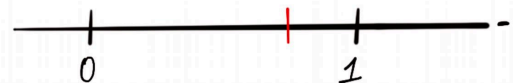
F: *(pausa)* uh... tipo «(82, 10)»?

Differenti significati di frazione

Frazioni come parte-tutto



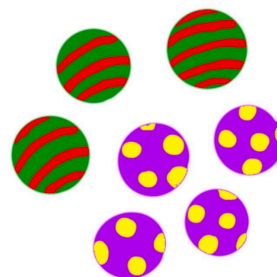
Frazioni come punto su una retta



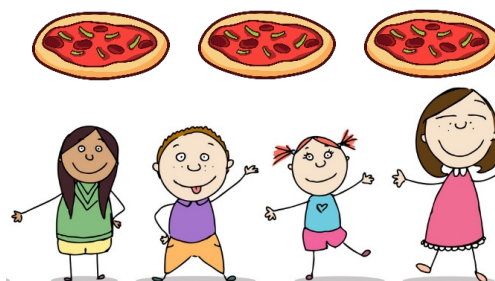
Frazioni come operatore

$$\frac{3}{4} \text{ di } 20$$

Frazioni come rapporto



Frazioni come quoziente



Difficoltà del significato delle frazioni come parte-tutto:

- Importanza **dell'intero di riferimento**

«la metà» di 100 è uguale alla
«metà» del rettangolo
disegnato?!

50% $\frac{1}{2}$ 0,2 $\frac{5}{10}$

Cerchia tutte quelle che rappresentano lo stesso numero.

50% $\frac{1}{2}$ 0,2 $\frac{5}{10}$

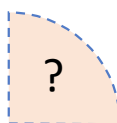
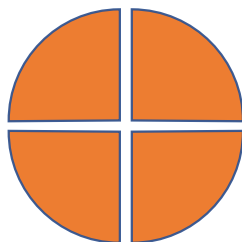
S = META' DI 100

META

Difficoltà del significato delle frazioni come parte-tutto:

- frazioni «**improprie**»

Rappresenta
“cinque quarti”

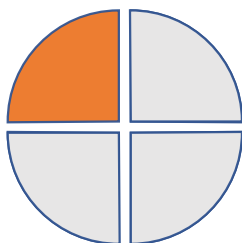


Divido in 4 parti
e ne
prendo...5?!

Difficoltà del significato delle frazioni come parte-tutto:

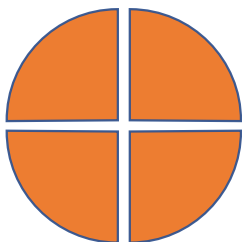
- frazioni «**improprie**»

Devi
considerare un
altro intero



Ma così ho
“cinque di 8”, $\frac{5}{8}$!

...e prenderne
una parte



Differenti significati di frazione

Kieren (1982) ha identificato cinque contesti di significato per la **frazione**:

- 1) Misura,
- 2) Rapporto (disomogeneo),
- 3) Quoziente,
- 4) Operatore,
- 5) Relazione parte-tutto

Durante gli anni della scuola elementare i bambini incontrano più volte i numeri razionali, ovviamente solo secondo alcune di queste accezioni, ma, come quando un attore sapientemente truccato diventa irriconoscibile, i bambini non riescono a riconoscerli, non riescono da soli a rendersi conto che c'è una sola astrazione matematica sottostante.

(Hart, 1985)

La ricerca suggerisce

L'insegnamento di **frazioni equivalenti** potrebbe essere potenziato dall'apprendimento dei **rapporti**,

mentre i costrutti di **operatore** e di **quoziente** potrebbero favorire lo sviluppo concettuale delle operazioni di **moltiplicazione tra frazioni**.

La ricerca suggerisce

*«Invece di correre a fornire agli studenti diversi algoritmi per eseguire operazioni sulle frazioni, i risultati del presente studio, in accordo con studi precedenti (Lamon, 1999; Brousseau et al., 2004) suggeriscono che gli insegnanti dovrebbero porre di più enfasi sulla **comprensione concettuale delle frazioni**.*

[E che] che l'insegnamento delle diverse operazioni tra frazioni dovrebbe essere direttamente collegato a specifiche interpretazioni delle frazioni.»

Tradotto liberamente da Charalambous & Pitta-Pantazi (2005)

Artefatti e "perché" all'interno del progetto PerContare

Proponiamo attività con

- NON per favorire un'iniziativa
- NON per evitare che gli allievi
- NON per fare meno fatica
- NON per fare prima

"[...] In particolare il sostegno da dare agli allievi in difficoltà non si esaurisce in un supporto per 'aiutarli' a dare risposte giuste, ma si allarga alla determinazione di perseguire processi di pensiero significativi, e di costruire pazientemente occasioni di crescita."

Rosetta Zan, *I danni del bravo insegnante*

