

Il numero come misura di quantità: suggestioni dalle ricerche dello psicologo V. V. Davydov

Maria Mellone

Università degli studi di Napoli Federico II

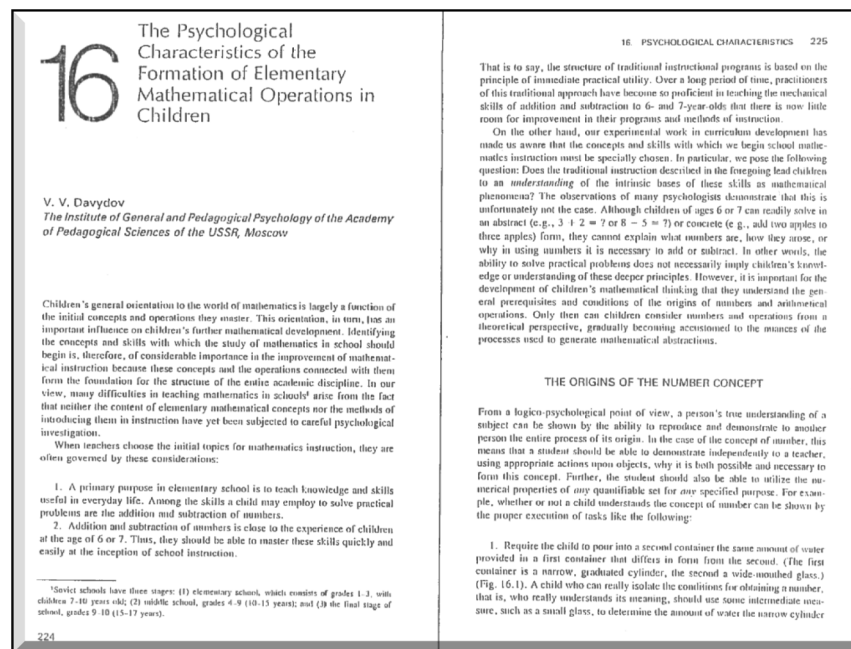


16 Novembre 2016 – Maria Mellone

Le caratteristiche psicologiche della formazioni delle operazioni elementari nei bambini (Davydov, 1982)



Vasily Vasil'evich Davydov (1930–1998)



Davydov e l'activity theory

Fondamento di tutta la coscienza umana è l'attività di produzione pratico oggettiva: il lavoro. Solo all'interno dei modi, storicamente formatisi di quest'attività che trasforma la natura, si organizzano e operano tutte le forme del pensiero (V. V. Davydov)



Critica ai metodi tradizionali di insegnamento



non sviluppino nei bambini la capacità di generalizzazione

Percorso alternativo basato sull'attività



- Problema matematico, la cui risoluzione richiede la genesi di un nuovo concetto;
- Individuazione del nesso che funge da soluzione;
- Rappresentazione in sistema di segni che consenta uno studio teorico e generalizzato;
- Esposizione delle proprietà individuate.

L'ALGEBRA COME OBIETTIVO DI APPRENDIMENTO DEL PERCORSO MATEMATICO NELLA SCUOLA PRIMARIA



Bourbaki, 1938

Possiamo cogliere l'essenza di un concetto studiando le forme più mature. Ecco perché, “Il ricercatore deve studiare l'oggetto nella forma più matura; poiché in questa forma più matura, gli aspetti essenziali dell'oggetto appaiono in un modo più sviluppato”.



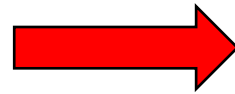
Algebra

L'INDAGINE PSICOLOGICA DI DAVYDOV

Obiettivo: Individuare i **concetti** e le **competenze** iniziali che dovrebbero costituire il punto di partenza nello studio della matematica a scuola.

Perché è importante?

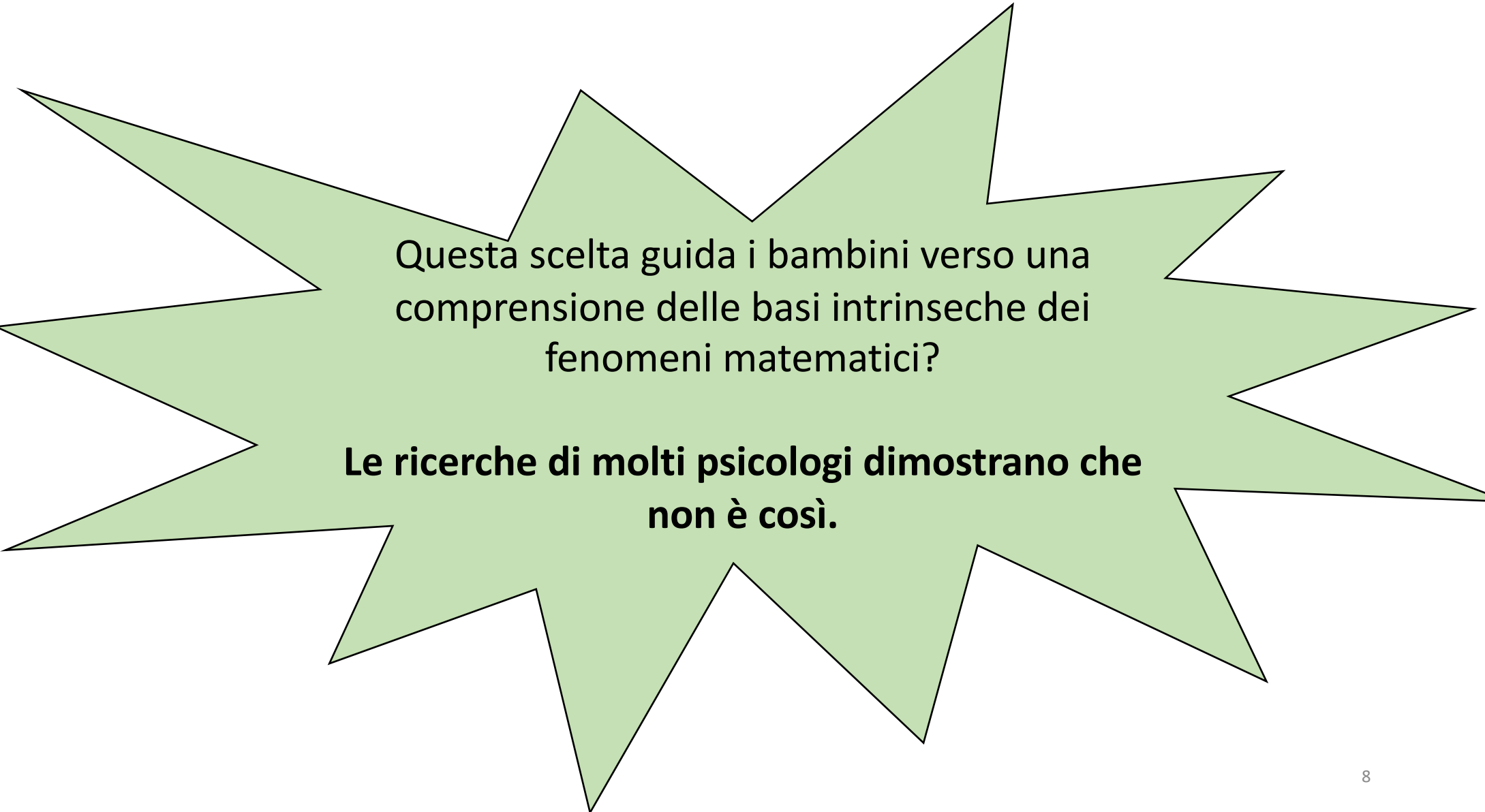
La **disposizione** generale dei bambini nei confronti della matematica è condizionata dai concetti e dalle operazioni che essi padroneggiano inizialmente.



Questa disposizione, a sua volta, svolge un ruolo significativo nello sviluppo successivo delle loro competenze matematiche.

Le considerazioni che vengono fatte dagli insegnanti rispetto alla scelta degli argomenti da proporre inizialmente per l'insegnamento della matematica sono indirizzate allo sviluppo di conoscenze e abilità utili nella vita di tutti i giorni, come ad esempio, le operazioni di **addizione** e **sottrazione** dei numeri.

La struttura dei curriculum tradizionali si basa quindi sul principio dell'**immediata utilità pratica**.



Questa scelta guida i bambini verso una
comprensione delle basi intrinseche dei
fenomeni matematici?

**Le ricerche di molti psicologi dimostrano che
non è così.**

I bambini formati secondo il curriculum tradizionale sono in grado di eseguire prontamente due tipi di operazioni:



OPERAZIONI ASTRATTE

$$3 + 2 = ?$$

$$8 - 5 = ?$$

OPERAZIONI CONCRETE

 +  = ?

 -  = ?

I BAMBINI NON SONO PERÒ IN GRADO DI SPIEGARE **COSA SONO I NUMERI**,
COME NASCONO, COME FUNZIONANO

ABILITÀ DI RISOLVERE
PROBLEMI PRATICI



COMPrensione DI
PRINCIPI PIÙ PROFONDI

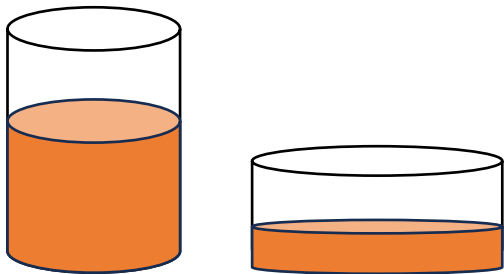
È invece importante per lo sviluppo del pensiero matematico dei bambini che loro capiscano i prerequisiti e le condizioni generali dell'origine dei numeri e delle operazioni aritmetiche, al fine di considerare il tutto da una prospettiva teorica, abituandosi gradualmente alle sfumature dei processi utilizzati per generare
l'astrazione matematica.

LA MISURA ALL'ORIGINE DEL CONCETTO DI NUMERO

Da un punto di vista psicologico, aver compreso il **concetto di numero** significa essere in grado di dimostrare perché è allo stesso tempo *possibile* e *necessario* formare questo concetto.

Una comprensione profonda in tal senso può essere esplorata attraverso le seguenti attività:

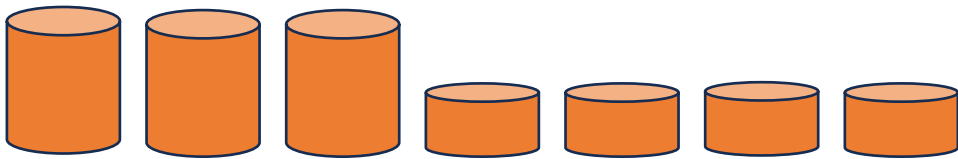
1. *Versare la stessa quantità d'acqua contenuta in un primo contenitore in un secondo diverso per forma (non travasandola).*



Una possibile strategia attuabile da un bambino che sa realmente isolare le caratteristiche relative al numero, consiste nell'usare una **misura intermedia**, come un bicchiere, per determinare la quantità di acqua contenuta nel primo contenitore (ad esempio, cinque bicchieri) e poi versare lo stesso numero di bicchieri nel secondo contenitore.

LA MISURA ALL'ORIGINE DEL CONCETTO DI NUMERO

2. *Determinare quanti contenitori grandi d'acqua sono contenuti in una serie di tre contenitori grandi e quattro contenitori piccoli, uguali alla metà di quello grande.*

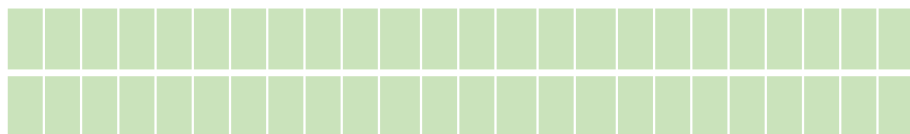


Qui il bambino dovrebbe contare due contenitori piccoli come uno grande, ottenendo il risultato di cinque, considerando in tal modo il contenitore grande come **unità di misura**.

LA MISURA ALL'ORIGINE DEL CONCETTO DI NUMERO

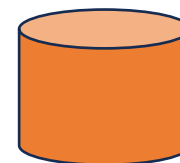
3. *Determinare diverse configurazioni numeriche corrispondenti a una stessa quantità.*

CASO DISCRETO



In questo compito il bambino deve costruire gruppi uguali di blocchi e poi usare quei gruppi come un'unità di misura per esprimere la superficie attraverso diversi numeri. Ad esempio, se 24 blocchi sono raggruppati a 2 a 2, allora la quantità numerica corrispondente sarà il numero 12; se saranno raggruppati a 4 a 4 allora il numero sarà 6 e così via.

CASO CONTINUO



In questo compito viene richiesto di mostrare come un'unica quantità di acqua in un contenitore può essere descritta con numeri diversi. Misurare con unità di misura differenti una stessa quantità d'acqua in modo esprimendone quindi la misura con numeri diversi.

UNITÀ DI MISURA

Per ognuno di questi problemi, il bambino deve essere in grado di:

- Riconoscere le molteplici relazioni che possono esistere tra un oggetto continuo o discreto e la parte di quell'oggetto che è stata usata come unità di misura;
- Comprendere il carattere arbitrario della dimensione della parte che è usata per determinare la misura dell'intero oggetto;
- Cambiare l'unità di misura con un'altra e così determinare diverse misure per uno stesso oggetto.

Il numero è parte di un concetto matematico più generale, ossia il concetto di quantità

- il concetto base di *quantità*;
- la rappresentazione dei confronti tra quantità ($a > b$, $a = b$, $a < b$);
- la formula generale

$$\frac{A}{a} = n$$

A una quantità, **a** una unità di misura e **n** è il numero di volte in cui **a** è contenuta in **A**

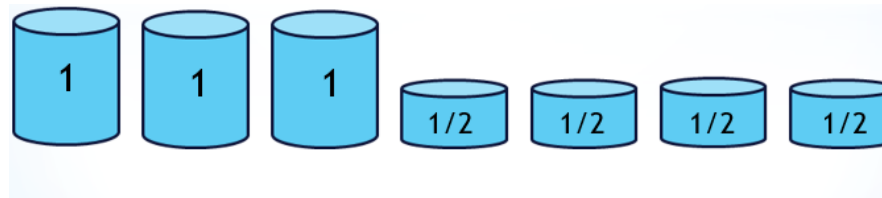
UNITÀ DI MISURA

Solo quando un bambino sa eseguire questi passi, si può parlare della sua comprensione dei numeri come **metodo matematico generale** atto ad esprimere rapporti quantitativi tra oggetti o parti di oggetti.

Secondo Davydov seguendo i programmi tradizionali, i bambini fra la prima e la terza elementare mostrano padronanza degli algoritmi standard per l'addizione e la sottrazione dei numeri a una o più cifre (es. $8 + 5 = 13$; $26 + 9 = 35$; ecc.), ma fanno fatica ad attribuire significato a un'espressione del tipo

$$3 + 4 = 5$$

$$3U + 4u = 5U \text{ dove } u = 1/2U$$



IL CONCETTO DI QUANTITÀ

Il concetto di base implicito nel dominio dei numeri reali studiati a scuola è la **quantità**. Il concetto di numero nasce nel contesto della misurazione di quantità continua, quando si **stabilisce una relazione** tra quella quantità e una parte di essa usata come unità di misura. In questo approccio è possibile considerare il conteggio come la misura di un insieme di oggetti discreti (Lebesgue, 1936; Kolmogorov, 1960).

Ma cos'è la quantità?

Il significato della nozione di quantità è dato dal **confronto** di elementi di insiemi di oggetti simili, mediante le relazioni “uguale a”, “più grande di”, o “più piccolo di” (per esempio, la lunghezza dei segmenti o la temperatura dei gas).

IL CONCETTO DI QUANTITÀ

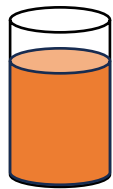
*“Quando determiniamo un **criterio di confronto**, trasformiamo un insieme in una quantità” (Kagan, 1963)*

Quindi, se si è interessati a capire fino in fondo le **origini del numero**, è molto importante riconoscere che l'insieme dei numeri naturali, una volta introdotta una relazione d'ordine, è un esempio di quantità matematica.

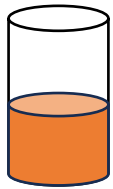
Nel lavorare con le quantità, si può costruire un **sistema complesso di trasformazioni** da cui scaturiscano le relazioni sussistenti fra le proprietà delle quantità. Attraverso queste trasformazioni, ci si può spostare da **uguaglianze a disuguaglianze**, così come eseguire addizioni e sottrazioni.

IMPLICAZIONI CURRICOLARI

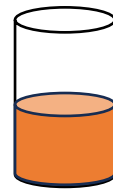
1. RICONOSCERE LE RELAZIONI



A



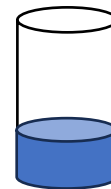
B



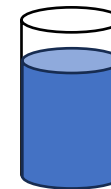
C

$$\begin{aligned} A &> B \\ A &> C \\ B &= C \end{aligned}$$

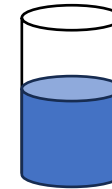
2. EVIDENZIARE LE PROPRIETÀ DELLE RELAZIONI



D



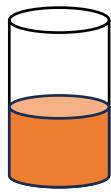
E



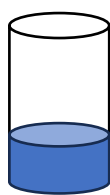
F

$$\begin{aligned} D &= D && \text{(RIFLESSIVITÀ)} \\ \text{se } D < E \text{ allora } E > D && \text{(ASIMMETRIA)} \\ \text{se } E > F \text{ e } F > D \text{ allora } E > D && \text{(TRANSITIVITÀ)} \end{aligned}$$

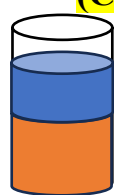
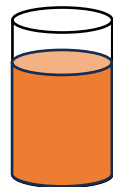
3. INTRODURRE E VISUALIZZARE LE OPERAZIONI DI ADDIZIONE (COME INCREMENTO) E SOTTRAZIONE (COME DECREMENTO)



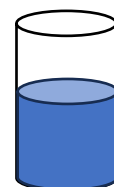
C



D

 $C + D$ 

A



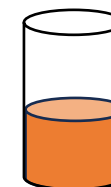
F

 $A - F$

4. PASSARE DA UGUAGLIANZE A DISUGUAGLIANZE



B



C

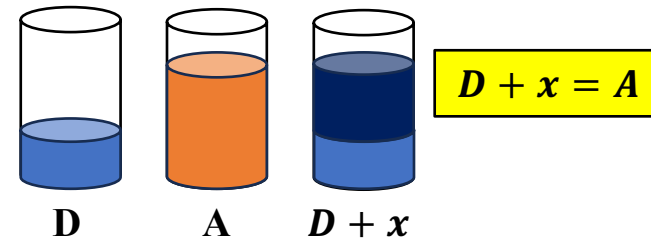
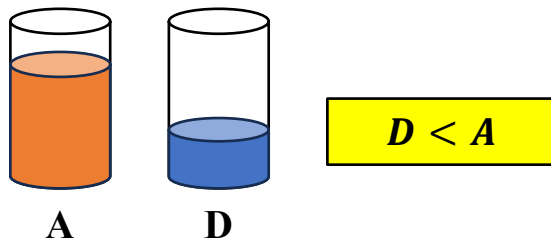
 $C + D$

$$\begin{aligned} B &= C \\ B &< C + D \end{aligned}$$

IMPLICAZIONI CURRICOLARI

In particolare, l'operazione inversa a quella proposta nell'attività 4, ovvero passare da una disuguaglianza ad un'uguaglianza, riveste un'importanza particolare

La quantità di acqua da aggiungere a D (o togliere ad A) per ottenere un'uguaglianza, pari alla **differenza** tra A e D, non è nota anzitempo, tuttavia è possibile esprimerla con l'aiuto della x .



IMPLICAZIONI CURRICOLARI

La determinazione di $x = A - D$ riveste il punto più difficile dell'intera questione, mettendo il bambino di fronte a un nuovo significato di sottrazione. Qui essa non rappresenta un decremento effettivo come nell'attività precedente, ma la **descrizione formale** del processo di confronto delle grandezze A e D. In altre parole, A rimane materialmente la stessa quantità che era prima, mentre la quantità che corrisponde ad x deve essere ottenuta da un'altra fonte fisica.

$D < A$ (la disuguaglianza iniziale)

$D + x = A$ (la trasformazione progettata)

$x = A - D$ (la differenza da determinare)

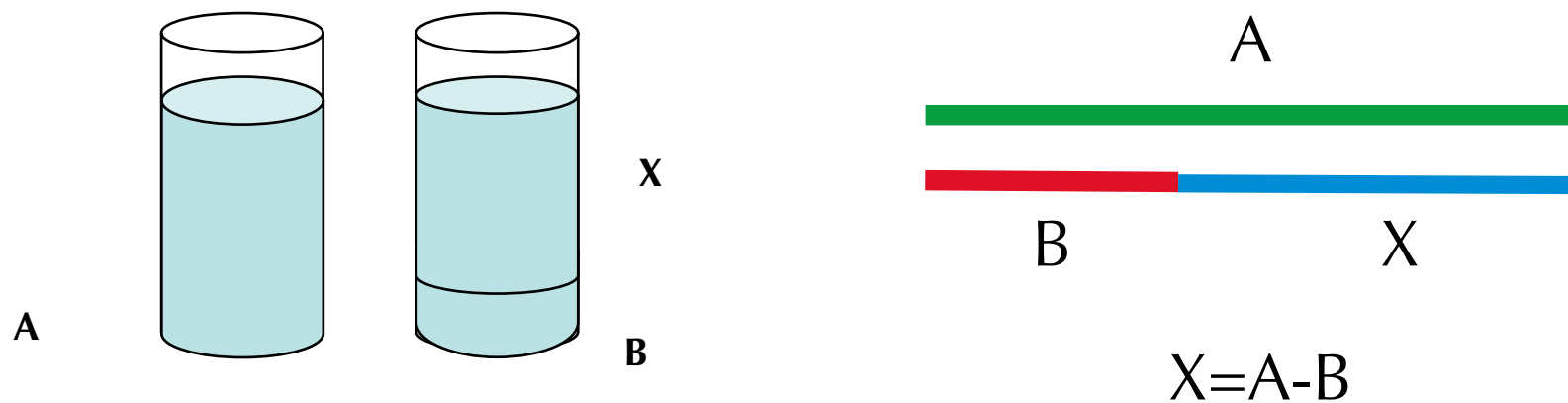
$D + (A - D) = A$ (l'uguaglianza finale)



$$x = A - D$$

Nel corso del lavoro, basato su questo curriculum sperimentale, si riduce gradualmente il ruolo delle trasformazioni materiali, e assume maggiore importanza, nella risoluzione delle equazioni, quello delle trasformazioni di espressioni. Per preparare i bambini a questo passaggio viene usata una **strategia intermedia di rappresentazione grafica**, come i segmenti.

IMPLICAZIONI CURRICOLARI



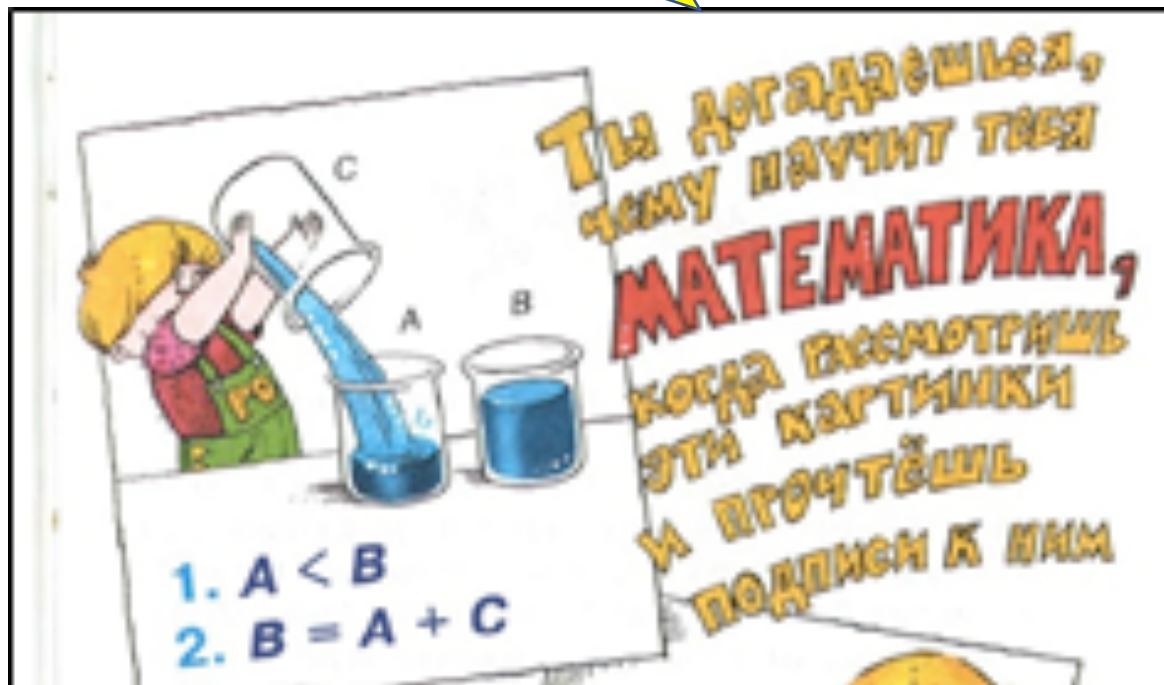
$$A > B$$

$$A = B + X$$

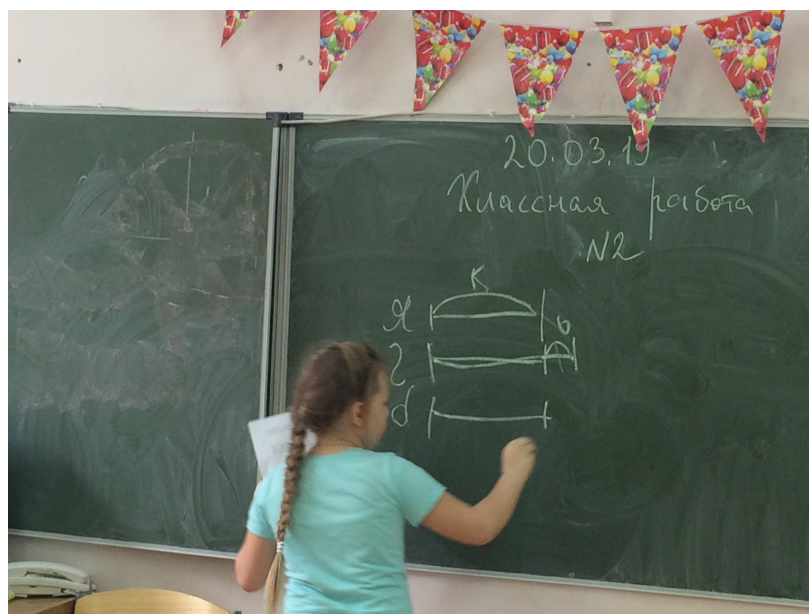
$$X = A - B$$

struttura "algebrica" prima
dell'Aritmetica

Capirai davvero cos'è la matematica quando guardando le figure sarai in grado di collegarle alle formule



.... in una seconda elementare a Mosca
(School Moscow '91, 2019)



1. В коробке с игрушками лежало a машинок, а кукол на k больше. Сколько игрушек было в коробке?

2. Вова в магазине купил b тетрадей, а a меньше. Сколько тетрадей купил Вова?

3. Марина с Леной решали задачи. Марина решила d задач, а Лена на m меньше задач. Сколько задач решила Лена?

Костя собирал ягоды. Он собрал e смородины, а малины на x меньше. Ежевики он собрал на p больше, чем смородины. Сколько ягод собрал Костя?

Marina e Lena hanno risolto dei problemi.
Marina ha risolto d problemi e Lena ha risolto m problemi in meno di Marina.
Quanti problemi ha risolto Lena?

CONCLUSIONI

Dopo molti anni di lavoro con questo curriculum sperimentale per la scuola elementare sono state tratte tre importanti considerazioni:

1. Basandosi sulla comprensione delle caratteristiche delle uguaglianze e disuguaglianze e del passaggio dall'una all'altra, il lavoro dei bambini con i numeri può essere indirizzato non solo alle **tecniche di calcolo**, ma anche allo studio delle **relazioni strutturali algebriche** che regolano questi calcoli. Le **operazioni aritmetiche** potranno poi essere studiate più produttivamente anche con i metodi tradizionali di insegnamento.
2. Il lavoro con le quantità serve come introduzione ai numeri, numeri interi ma anche frazioni.
3. Il lavoro con le quantità è connesso fin dall'inizio con i **simboli letterali**. Questo permette al bambino di studiare le relazioni matematiche stesse, il che è molto importante per il successivo percorso matematico.

CONCLUSIONI

Attraverso una comprensione delle proprietà generali delle quantità, i bambini possono proseguire con la comprensione di due importanti caratteristiche dei numeri:

- Un oggetto, pensato esso stesso come una quantità, non è determinato numericamente, ma acquisisce una **determinazione numerica** quando si sceglie un'altra quantità come unità di misura.
- Uno stesso oggetto può essere misurato con diverse unità di misura e quindi individuato con numeri diversi. Se un bambino, in certe attività, è in grado di cambiare liberamente le unità di misura delle quantità, rappresentandole con numeri diversi, allora in linea di principio il bambino è orientato correttamente verso l'origine del concetto di numero, in altre parole si è **impadronito del concetto vero e proprio**.

“Se nell'insegnamento si separano i concetti matematici dalle loro origini, ne viene fuori un percorso educativo completamente privo di principi e carente sul piano logico”
(Kolmogorov, 1960).

TRASPOSIZIONE CULTURALE

La Trasposizione Culturale è una prospettiva che inquadra l'uso di pratiche educative matematiche adottate in altri contesti culturali come un'opportunità per mettere in discussione le pratiche didattiche del proprio contesto culturale, al fine di riconsiderare l'intenzionalità educativa alla base di ogni prassi educativa.

(Mellone, Ramploud, Carotenuto, 2020)



PerContare

