

# **Analisi delle Potenzialità di Applicazioni Multi-Touch per la Costruzione del Significato di Numero Naturale**

Anna Baccaglini-Frank

## **Abstract**

Recent development of educational technology that allows multi-touch interactions, such as Interactive White Boards, iPads and other tablets, and iPhones and other smartphones has opened new frontiers in the field of education, and in particular of mathematics education. In this paper we will discuss various theoretical aspects of the development of number sense from the point of view of both cognitive psychology and mathematics education. We will then use these theoretical considerations to analyze three different multi-touch applications that have been developed to foster number sense in young children.

## **Sommario**

Sono state sviluppate recentemente una serie di oggetti tecnologici che consentono un'interazione a più dita (multi-touch), come le Lavagne Interattive Multimediali (LIM), gli Smartphones (come per esempio l'iPhone), i tablets (come per esempio l'iPad), e altre superfici interattive come banchi o tavoli. L'uso di oggetti con potenzialità multi-touch apre nuove frontiere nell'ambito dell'insegnamento e apprendimento della matematica. In questo articolo propongo alcune riflessioni per analizzare e confrontare alcuni punti di forza e di debolezza di tre diversi applicativi il cui design dovrebbe favorire l'apprendimento di concetti numerici legati al calcolo (conteggio – aspetti ordinali e cardinali del numero – e operazioni di addizione e sottrazione).

“Without the ability to attach number representations to the neural representations of fingers and hands in their normal locations, the numbers themselves will never have a normal representation in the brain.”  
(Butterworth, 1999)

## **Introduzione**

La maggior parte delle applicazioni sviluppate per la didattica della matematica è concepita per interazioni utente-macchina mediate dalla tastiera o dal mouse. Anche le applicazioni sviluppate per le Lavagne Interattive Multimediali (LIM) sfruttano solo in parte il potenziale offerto dalla tecnologia multi-touch, in quanto prevedono spesso input dalla tastiera e da una penna o da un dito usati come mouse. Recentemente sono state sviluppate alcune applicazioni per oggetti tecnologici quali la LIM, l'iPad o diversi tablets sfruttando la possibilità, che tali oggetti hanno, di ricevere molteplici input contemporaneamente nella forma di “tocchi” di più dita (potenzialmente anche di utenti diversi). In questo articolo non mi occupo di altri aspetti vantaggiosi dal punto di vista didattico di questi oggetti tecnologici, come, per esempio, la possibilità di essere maneggiati agevolmente da bambini grazie alle loro dimensioni e peso ridotti o la possibilità di favorire lavori di collaborazione tra diversi gruppi di studenti o utenti anche a distanza. Mi concentrerò, invece, sulle potenzialità offerte da particolari applicazioni che fanno uso della tecnologia multi-touch per favorire la costruzione del significato di numero naturale. In particolare proporrò alcune riflessioni su tre applicazioni per iPad create per fini didattici, che ho testato e il cui design vuole favorire la costruzione del significato di numero.

### **Perché l'uso delle dita è importante per la costruzione del significato di numero naturale? E quali usi lo sono particolarmente?**

Alcuni risultati ottenuti nel campo delle neuroscienze hanno messo in luce un legame neuro-funzionale tra l'uso delle dita e lo sviluppo del senso del numero. Per esempio, Butterworth (1999b; 2005) ha ipotizzato che le rappresentazioni numeriche siano fondate su tre abilità di base: la capacità innata di rappresentare piccole numerosità (o *subitizing*), l'abilità motoria fine (o *finger tapping*), e l'abilità di rappresentarsi mentalmente le dita (*gnosia digitale*). L'autore dichiara:

“Without the ability to attach number representations to the neural representations of fingers and hands in their normal locations, the numbers themselves will never have a normal representation in the brain.” (Butterworth, 1999, pp. 249-250)

[traduzione dell'autrice: “La mia ipotesi è che senza la capacità di associare la rappresentazione dei numeri alla rappresentazione neurale delle dita e delle mani nelle loro posizioni normali, gli stessi numeri non possono avere una rappresentazione normale nel cervello”]

L'argomentazione di Butterworth si fonda sull'idea che si costruiscono rappresentazioni numeriche concrete e astratte usando le dita, le parole e i numerali (i simboli). Le dita sono usate in tutte le culture per rappresentare numerosità: ecco perché, secondo Butterworth, la capacità di rappresentare mentalmente le dita (*gnosia digitale*) è intrinsecamente legata alla rappresentazione di numerosità. Inoltre, poiché sono sempre a portata “di mano”, i bambini si trovano spesso a usare le dita non solo per rappresentare numerosità, ma anche per contare e fare aritmetica. Le dita, dunque, fungono da ponte nel legare rappresentazioni concrete a rappresentazioni astratte delle nozioni di “quantità” e delle “operazioni” (almeno di addizione e sottrazione).

In un tale scenario ha senso avanzare l'ipotesi che l'abilità motoria fine necessaria per eseguire compiti di conteggio con le mani diventi anch'essa fondamentale per lo sviluppo dei concetti che stanno alla base del senso del numero e, dunque, dell'aritmetica. Uno studio recente (Penner-Wilger et al., 2007), fondato su una varietà di studi (Benoit, et al., 2004; Landerl, et al., 2004; Fayol & Seron, 2005; Barnes, Smith-Chant, & Landry, 2005; Anderson & Penner-Wilger, 2007; Dehaene, et al. 2003; Fayol, et al., 1998; Noël, 2005), ha confermato tale ipotesi, dimostrando che non solo l'abilità motoria fine (o *finger tapping*) ma anche altre due abilità costituiscono buoni predittori della conoscenza del sistema numerico e delle abilità di calcolo di bambini alla scuola primaria. Queste altre due abilità sono la *gnosia digitale*, descritta sopra, e il *subitizing*, cioè la capacità di riconoscere piccole numerosità senza

dover ricorrere a strategie di conteggio (Butterworth, 1999b; Dehaene, 1997).

In particolare, per quanto riguarda la gnosis digitale, uno studio di Noël (2005), mostra che diversi indicatori di gnosis digitale, tra cui orientamento destra-sinistra e scrittura a mano, sono significativamente correlate con le abilità numeriche dei soggetti testati. Successivamente Bafalluy e Noël (2008) hanno proposto una sperimentazione per studiare gli effetti di un allenamento delle dita (*potenziamento digitale*) sulle abilità di calcolo di bambini con bassi punteggi nel test di gnosis digitale. Il potenziamento ha fatto sì che le prestazioni dei bambini del gruppo sperimentale siano risultate significativamente migliori di quelle degli altri bambini dei gruppi di controllo negli ambiti della gnosis digitale, della rappresentazione della numerosità con le dita e nei compiti di quantificazione; le prestazioni di questi bambini tendevano inoltre a essere migliori nei compiti di trattamento di cifre arabe.

In generale questi studi portano conferme all'ipotesi di Butterworth sulle tre abilità di base necessarie per la cognizione della numerosità e hanno implicazioni per l'identificazione precoce di bambini a rischio nell'ambito numerico, bambini che potrebbero eventualmente essere diagnosticati<sup>1</sup> con *discalculia evolutiva* (Butterworth, 2005). Inoltre i risultati indicano che è possibile potenziare la gnosis digitale in bambini piccoli e che ciò può fornire un utile aiuto all'apprendimento della matematica.

---

<sup>1</sup> La *discalculia evolutiva* è un disturbo specifico dell'apprendimento (DSA). Durante la *Consensus Conference* del 2011 si è stabilito che la sua diagnosi non può essere fatta prima della terza elementare, poiché deve essere terminato il normale processo di insegnamento delle abilità di calcolo.

## La costruzione del significato di numero naturale dal punto di vista della didattica della matematica

Per rispondere alla domanda “*Quanti oggetti ci sono?*” un bambino in genere comincia a contare dicendo le “parole-numero” in sequenza (Fuson, 1988). I principi fondamentali necessari per portare a termine correttamente la richiesta sono i cinque principi di Gelmann e Gallistel (1978): 1) *il principio di corrispondenza uno-a-uno*, che mette in relazione ciascun oggetto dell’insieme in questione con uno e un solo numerale; 2) *il principio dell’ordine stabile* secondo cui i numerali devono essere assegnati in un ordine preciso e invariante, cioè ripetibile; 3) *il principio di cardinalità*, che implica che l’ultimo numerale pronunciato nel conteggio dell’insieme di oggetti rappresenti la numerosità dell’insieme stesso; 4) *il principio di astrazione*, secondo cui possono essere contati oggetti di qualsiasi tipo, anche astratti; 5) *il principio di invarianza dell’ordine* per cui non importa in quale ordine vengano contati gli oggetti dell’insieme.

In particolare il terzo principio, *il principio di cardinalità*, prevede il passaggio dall’ordinalità alla cardinalità e dunque dalla percezione di oggetti separati a quella di insieme avente per elementi tali oggetti, fondamentale per una corretta concettualizzazione del numero. Infatti Nunes, Bryant e Watson (2009) scrivono che i bambini devono sviluppare tre tipi di relazioni tra “parole-numero” e numerosità:

“they need to understand cardinality; they need to understand ordinal numbers, and they need to understand the relation between cardinality and addition and subtraction.”

[traduzione: “devono capire la cardinalità; devono capire i numeri ordinali e devono capire la relazione tra la cardinalità e l’addizione e la sottrazione.”]

In linea con tale punto di vista, Vergnaud (2009) sostiene che la comprensione della cardinalità non si limita alla mera conoscenza del fatto che l’ultima “parola-numero” nella sequenza di conta di un insieme di oggetti rappresenta il numero degli oggetti appartenenti all’insieme stesso. Comprendere la cardinalità significa anche

essere in grado di *usare* numeri e operazioni e, in particolare, essere in grado di usare strategie di tipo “counting on<sup>2</sup>”: infatti, secondo Vergnaud, il bambino ha sviluppato un senso di cardinalità se è in grado di rispondere correttamente alla domanda “*Quanti oggetti ci sono?*” senza dovere ricominciare la conta daccapo quando a un insieme di cui è nota la cardinalità si aggiungano altri oggetti.

Il passaggio dall’ordinalità alla cardinalità è un aspetto chiave nella formazione del concetto di *part-whole concept*<sup>3</sup>, ossia “intero composto da parti”, proposto da Resnick, Bill, Lesgold e Leer (1991). Gli autori fanno riferimento a due componenti del sapere matematico che si sviluppano indipendentemente: gli *schemi proto-quantitativi* (rispetto al *partwhole concept*) e la *linea numerica mentale*. Affinché si sviluppi correttamente il concetto di “numero” come *partwhole concept*, queste due componenti devono essere messe in relazione fra loro e questo è un passaggio cognitivo critico nello sviluppo. Un celebre esempio di Fuson (1992, p. 63) illustra una conseguenza dell’assenza di relazioni tra le due componenti: un bambino conta cinque macchine e alla domanda: “*How many? [Quante sono?]*” risponde: “*This is the five cars.* [traducibile come: “*Queste sono le cinque macchine*” o “*Questa è la cinque macchina.*”], indicando l’ultima macchina contata. Un’altra conseguenza dell’assenza di relazioni tra le due componenti si può vedere nell’ambito dell’addizione e della sottrazione. Queste operazioni, se le due componenti non sono state messe in relazione, rischiano di essere concepite soltanto come la richiesta di contare “in avanti” o “indietro”. Entro il 20 tale interpretazione può portare al successo, ma se si devono addizionare due numeri come 44 e 37

---

<sup>2</sup> Per esempio, per determinare la numerosità di un insieme di 8 elementi, in cui si riconosce un sottoinsieme di 5 elementi, una strategia di tipo “counting on” potrebbe essere contare gli elementi non appartenenti al sottoinsieme: “sei, sette, otto”.

<sup>3</sup> Sottolineiamo che un analogo del *partwhole concept* si ritrova anche nella tradizione didattica cinese, nella presentazione dei “problemi con variazione”, descritti, per esempio, da Sun (2011).

e si comincia a contare in avanti da 44, non si riuscirà ad arrivare velocemente (e spesso nemmeno correttamente) al risultato. Inoltre, usando il *partwhole concept* è possibile aggiungere, per esempio, 7 e 8 in molti modi diversi:  $(5+2) + (5+3) = (5+5) + (2+3) = 10 + 5 = 15$ ;  $(5+2) + 8 = 5 + (2+8) = 5 + 10 = 15$ ;  $(8-1) + 8 = 8 \times 2 - 1 = 16 - 1 = 15$  ecc.

### **Calcolare con le dita**

Nonostante il fatto che “contare sulle dita” abbia spesso (purtroppo) una brutta reputazione in classe, diversi studi mostrano che contare sulle dita può favorire lo sviluppo di abilità numeriche (Brissiaud, 1992; Andres, Seron, & Olivier 2007; Sato et al. 2007; Thompson et al. 2004). Probabilmente l’educazione scolastica spinge al superamento dell’uso delle dita anche perché un uso scorretto o parziale di tale strategia può indurre errori. Per esempio, i bambini possono rimanere legati a un etichettamento rigido delle dita: secondo il principio della corrispondenza uno-a-uno ogni dito viene messo in relazione con uno e un solo numerale, ma diventa difficile stabilire, per esempio, il risultato di “10-1” se viene abbassato il “dito-6”. In questo caso, infatti, sarebbe necessario riassegnare alle dita che prima erano “dito-7”, “dito-8”, “dito-9” e “dito-10”, le nuove etichette “6”, “7”, “8”, “9”. Questa procedura può creare confusione in alcuni bambini. Sarebbe auspicabile esporre precocemente i bambini all’uso delle dita nel conteggio senza assegnare etichette-numero alle dita, in quanto potenziare strategie di calcolo con le dita può portare a benefici nella costruzione del significato di numero naturale. Paradossalmente l’uso delle dita può favorire un allontanamento da strategie che richiedono molte risorse cognitive (e dunque sono lente) basate sul puro conteggio, per passare a “strategie digitali” più efficienti ed efficaci.

Tra gli aspetti vantaggiosi nell’uso delle dita, vi è la loro naturale struttura di 10 per bambino e 5 per mano. Le diverse scomposizioni del 10 possono essere tutte rappresentate con le dita, per esempio, facendo riferimento al numero totale delle dita alzate e di quelle abbassate di volta in volta. Poiché il processo di *subitizing* funziona

bene entro il 5 è possibile riconoscere praticamente simultaneamente le dita sollevate (e abbassate) di due mani e dunque, senza contare, riconoscere le scomposizioni del 10, ma anche diverse configurazioni di dita sollevate, come 3 e 5; 4 e 2; 5 e 1; ecc. e quindi le scomposizioni di tutti i numeri naturali entro il 10. In genere sono favorite le scomposizioni che contengono 5 perché si tende a usare tutte le dita di una mano quando possibile e a rappresentare i numeri maggiori di 5 in maniera sequenziale (Brissiaud, 1992 p. 61). Per esempio, per rappresentare “8” in generale si alzano tutte le dita di una mano e tre dita dell’altra mano. In questo modo le dita vengono percepite e usate secondo il *partwhole concept* e dunque costituiscono un materiale a basso costo ben fondato per lo sviluppo del concetto di numero e delle abilità di calcolo (si veda Steinweg, 2009, citato in Ladel & Kortenkamp, 2009).

Vi sono molte altre strategie che fanno uso della complementarità di una quantità numerica rispetto al 5 o al 10 sia nell’ambito dell’addizione/sottrazione che della moltiplicazione/divisione, per la cui trattazione rimandiamo ad altre fonti (per esempio: Fischer, 1987, Lucangeli et al., 2003). Concludiamo questa sezione sottolineando come sia importante che il bambino alzi (o abbassi) le dita *simultaneamente* quando le usa per rappresentare quantità, affinché si potenzino le strategie di calcolo descritte sopra. Infatti, se le dita vengono alzate (o abbassate) una alla volta è probabile che il bambino utilizzi strategie di tipo “counting on” quando si trova davanti a un’addizione o a una sottrazione.

### **La tecnologia multi-touch e l’uso delle dita**

La ricerca suggerisce quindi che l’acquisizione di gnosis digitale, il potenziamento del finger-tapping e delle abilità di subitizing e l’uso delle dita per creare numeri possano costituire le basi per lo sviluppo della costruzione del significato di numero naturale. Mi chiedo ora se sia possibile sfruttare la tecnologia multi-touch per favorire un tale uso delle dita e, più in generale, un potenziamento delle abilità numeriche.

La tecnologia multi-touch comprende oggetti quali le LIM, gli Smartphones (come per esempio l'iPhone), i Tablets (come per esempio l'iPad) e altre superfici interattive come banchi o tavoli. Nella mia analisi considererò applicativi per iPad, dato che molti applicativi scritti per i sistemi operativi dei tablet, in particolare per l'iPad, sono disponibili anche in versioni per vari sistemi operativi con cui funzionano gli altri oggetti multi-touch. Inoltre l'iPad ha dimensioni appropriate (circa 12 per 19 cm e peso circa 600 gr) per poter essere utilizzato da un bambino. La maggior parte degli applicativi sviluppati con design mirato a potenziare o a esercitare abilità numeriche si presenta sotto forma di gioco o quiz in cui l'interazione avviene attraverso un tocco eseguito da un dito singolo, in genere l'indice, che corrisponde alla scelta di una "risposta" tra varie possibili, oppure alla scrittura di un numero in cifre arabe. Tali applicativi non sfruttano la possibilità offerta dalla tecnologia per la quale sono creati: quella di riconoscere *una varietà di gesti-tocco eseguiti anche simultaneamente*. Al massimo, per applicativi tipici come questi, se si richiede che i tocchi avvengano rapidamente, potrebbe essere potenziata l'abilità di *finger-tapping*, ma non gli altri modi di usare le dita suggerite dalla letteratura. In particolare, la maggior parte degli applicativi non prevede un *uso delle dita legato alla creazione/rappresentazione di numeri*.

Insieme ad altri ricercatori (per esempio: Sinclair, & Jou, submitted; Ladel & Kortenkamp, 2009, 2011) avanzo l'ipotesi che

|   |
|---|
| sia possibile sfruttare in modo efficace la funzionalità offerta dalle tecnologie multi-touch che prevede il riconoscimento di una varietà di gesti-tocco eseguiti anche simultaneamente. |
|---|

Esistono infatti alcuni applicativi – anche se pochissimi al momento – sviluppati con l’idea di potenziare abilità numeriche, che sfruttano la suddetta funzionalità. In particolare nella prossima sezione illustrerò come alcuni applicativi offrano la possibilità di far rappresentare diverse numerosità con le dita, facendo comparire oggetti virtuali con cui è possibile interagire usando le dita. Tali oggetti poi possono essere collegati (più o meno automaticamente a seconda delle scelte di design) alle forme standard di rappresentazione simbolica. Ho cercato applicativi per iPad sviluppati con l’idea di potenziare abilità numeriche nel bambino e il cui design prevedesse l’uso della funzionalità multi-touch. Ne ho individuati sette interessanti, di cui uno è un prototipo in fase di sperimentazione e uno per ora è sviluppato soltanto per tavoli multi-touch collegati a computers e non è ancora stato pubblicato. Nella prossima sezione proporrò un’analisi di tre di questi applicativi, rispetto all’uso che consentono e favoriscono nel bambino di diversi gesti-tocco simili a quelli descritti in letteratura e utili per la costruzione del significato di numero naturale.

### **Analisi di tre applicativi multi-touch**

Gli applicativi che ho deciso di analizzare sono scaricabili da iTunes Store tranne *TouchCounts*, che non è ancora stato pubblicato, ma che ho potuto sperimentare in quanto sono tra i “field-testers” a cui è stato mandato l’applicativo in anteprima. Avrei voluto includere nell’analisi anche l’applicativo *DOPPELMOPPEL*, sviluppato da Ladel e Kortenkamp (2009, 2011), ma non essendo ancora pubblicato, non mi è stato possibile utilizzarlo per una sperimentazione. In definitiva gli applicativi che analizzerò sono: *Ladybug Count* (il suo ambiente base e quelli in cui tratta l’addizione e la sottrazione), *Fingu*, e *TouchCounts* (nell’ultima versione rilasciata nel settembre 2012). Rimando a un altro lavoro le analisi dei seguenti applicativi per iPad scaricabili gratuitamente: *Finger Counter*, *Okta’s Rescue*, e *Path Tracer*. Ovviamente il lettore interessato può analizzarli autonomamente.

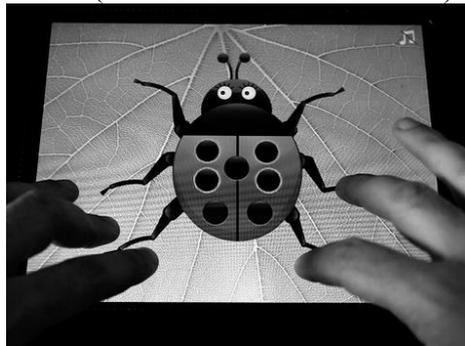
### *Ladybug Count*<sup>4</sup>

Questo applicativo si apre con la schermata di una coccinella su una foglia. È presentato come un gioco in cui lo scopo è far andar via la coccinella dalla foglia. Questo succede quando il bambino appoggia sullo schermo (in una posizione qualsiasi) il numero di dita corrispondenti ai punti sulla schiena della coccinella.

Feedback: l'appoggio di ogni nuovo dito sullo schermo viene registrato (anche non simultaneamente) con un “pop” e la comparsa di un cerchio verde che evidenzia uno dei puntini sulla schiena della coccinella. Non appena l'applicativo “sente” che il numero corretto di dita è appoggiato si riceve un feedback acustico, la dizione del numero rappresentato e l'uscita di scena della coccinella con la comparsa di un'altra coccinella. Il processo non ha termine fino alla chiusura dell'applicativo.

Se il bambino appoggia più dita sullo schermo dei puntini sulla schiena della coccinella, si evidenziano tutti i puntini con il “pop” ma si sente una voce maschile che dice: “Ops!” e la coccinella rimane ferma.

Se il bambino appoggia meno dita di quelle necessarie non succede niente (la coccinella rimane ferma).



**Figura 1: Il bambino deve appoggiare sullo schermo simultaneamente tante dita quanti sono i puntini sulla schiena della coccinella. In questo caso ha appoggiato solo 4 dita e la coccinella rimane ferma.**

---

<sup>4</sup> Si veda: <https://itunes.apple.com/us/app/ladybug-count/id443930696?mt=8>

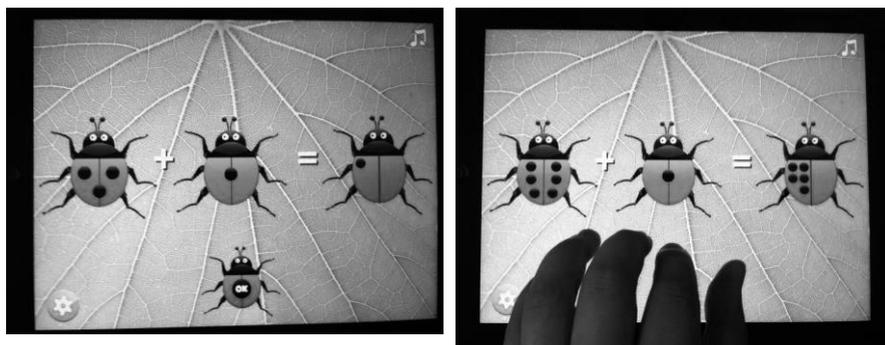
Analisi: rispetto alla letteratura analizzata, ritengo importante che sia necessario appoggiare sullo schermo il numero corretto di dita per far andare via la coccinella: ciò consente di vivere un'esperienza di successo nell'ambiente. Può essere positivo anche il fatto che non importa quali dita vengano appoggiate sullo schermo per rappresentare una certa numerosità (ma questo è necessariamente vero di tutti gli applicativi multi-touch). Inoltre l'associazione di feedback verbale e visivo nella rappresentazione di ciascuna numerosità può favorire la memorizzazione delle "parole-numero" entro il dieci.

Sono più perplessa e critica, invece, sulla scelta che non sia necessario che il bambino appoggi sullo schermo tutte le dita occorrenti contemporaneamente: infatti l'applicativo "aspetta" indefinitamente che sia appoggiato sullo schermo il numero corretto di dita. In questo modo il rischio è di favorire una rappresentazione sequenziale anziché simultanea di una numerosità e dunque potenzialmente un approccio di tipo "counting on" anziché di calcolo strategico rapido, particolarmente utile in compiti di tipo additivo e sottrattivo.

Nell'ambiente *Ladybug Addition* vengono presentate a ogni round 3 coccinelle sullo schermo nella configurazione di "addizione in riga": tra le prime due coccinelle c'è un segno "+" e tra la seconda e la terza il segno "=". Vi sono due modalità di gioco: la modalità "finger mode" e la modalità "tap mode". Nella prima modalità è richiesto l'appoggio simultaneo (alla fine) sullo schermo di tante dita quanti sono in tutto i puntini sulle schiene delle due coccinelle.

Feedback: a mano a mano che si appoggiano dita sullo schermo compaiono punti (uno per ciascun dito appoggiato) sulla schiena della terza coccinella. Quando è stato raggiunto il numero di punti che rappresenta la somma dei punti sulle schiene delle prime due coccinelle, il trio di coccinelle se ne va. Se vengono appoggiate troppe dita compaiono molti punti sulla schiena della terza coccinella (uno per ogni dito appoggiato), si sente "Ops!" e le coccinelle non se ne vanno.

Analisi: avanzo le stesse critiche proposte nella versione base dell'ambiente sul fatto che sia possibile arrivare alla risposta incrementando poco alla volta il numero delle dita appoggiate sullo schermo fino al raggiungimento della risposta corretta che, in questo modo, può essere raggiunta per tentativi anche senza sviluppare, necessariamente, consapevolezza del numero di dita effettivamente richiesto per rappresentare il numero-soluzione. Inoltre resto perplessa davanti alla scelta di una notazione di tipo "addizione in riga" che fa uso di segni matematici nel contesto di quantità analogiche, in quanto, quando si arriva alla schermata che rappresenta la soluzione si vedono sullo schermo il doppio dei puntini corrispondenti alle dita appoggiate: quelli sulle prime due coccinelle e tutti i punti sulla schiena della terza coccinella. Mostrerò più avanti che la situazione diventa ancora più difficile da gestire, in termini cognitivi, nel caso della sottrazione.



**Figura 2a e 2b: Ambiente *LadyBug Addition* nelle due versioni "tap mode" (2a), dopo che lo schermo è stato toccato una volta, e "finger mode" (2b), con cinque dita appoggiate.**

Infine, presentare addizione e sottrazione separatamente non favorisce lo sviluppo del fondamentale *partwhole concept* che evidenzia, in particolare, la complementarità delle operazioni.

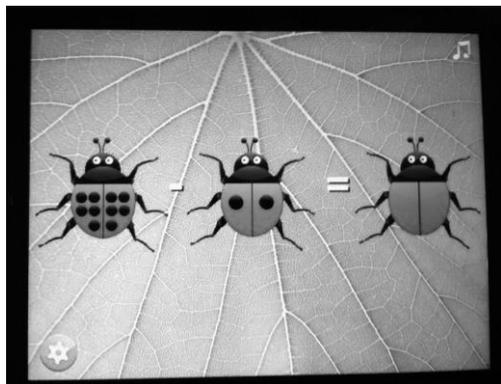
Nella modalità "tap mode" la risposta alla "addizione in riga" di coccinelle viene data attraverso "tap" successivi sullo schermo.

Feedback: a ogni "tap" compare un puntino sulla schiena della terza coccinella. Quando il bambino fa un tap su una quarta coccinella

con un “OK” sulla schiena, viene dato un feedback positivo (e il trio di coccinelle se ne va) o negativo come nelle versioni discusse sopra. In questa modalità l’ambiente non supporta il tocco di più dita simultaneamente: compare un singolo puntino se si fa un tocco a due o più dita.

Analisi: L’interazione per “tap” potrebbe favorire uno sviluppo dell’abilità motoria fine nel bambino, abilità che la ricerca ritiene fondamentale per lo sviluppo di abilità numeriche. In particolare richiedere al bambino di eseguire i “tap” il più velocemente possibile potrebbe essere un modo di potenziare l’abilità motoria fine (come nello studio proposto dai canadesi). Propongo una critica simile alla precedente per quanto riguarda la notazione: l’uso della struttura dell’addizione in riga con rappresentazioni analogiche del numero mi sembra inappropriato rispetto all’obiettivo di sviluppare competenza numerica. Inoltre la quarta coccinella con tanto di puntino nero sulla schiena – necessario per confermare la risposta – non contribuisce certo a rendere chiara la rappresentazione di una data numerosità.

L’ambiente *Ladybug Subtraction* si apre con una schermata simile a quella di *Ladybug Addition* e le modalità di interazione sono le stesse. Dunque non descriverò l’ambiente e il feedback fornito né ripeterò le considerazioni fatte nelle analisi precedenti; mi limito a ribadire la mia perplessità sulla scelta di utilizzare i segni matematici “-“ e “=” di fronte a rappresentazioni analogiche dei numeri. In particolare propongo una ulteriore riflessione su una possibile conseguenza negativa di tale scelta.



**Figura 3: Ambiente *LadyBug Subtraction* in versione “finger mode”.**

I puntini sulla schiena della seconda coccinella devono essere pensati come “parte” dell’insieme dei puntini sulla schiena della prima coccinella; tuttavia sullo schermo compaiono simultaneamente tutti i puntini sulla schiena della prima coccinella e tutti i puntini sulla schiena della seconda coccinella (oltre che – alla fine – tutti i puntini sulla schiena della terza coccinella). È controintuitivo (e dunque difficile per i bambini) pensare ai pallini della seconda coccinella come una parte dei pallini della prima coccinella, in quanto sono disegnati separatamente. In genere i bambini davanti a una situazione del genere rispondono come se fosse rappresentata un’addizione.

### *Fingu*<sup>5</sup>

In questo ambiente il bambino si trova in quella che sembra una stanza e compaiono sullo schermo due tipologie di oggetti in movimento. Bisogna appoggiare sullo schermo tante dita quanti sono in tutto gli oggetti. Il gioco è a tempo e a ogni livello il numero di oggetti che compaiono simultaneamente aumenta mentre il tempo a disposizione per riconoscere la numerosità e appoggiare il numero corrispondente di dita diminuisce. Il gioco si conclude in sette livelli e fornisce statistiche sulla performance del bambino relative a ciascun livello.

---

<sup>5</sup> Si veda: <https://itunes.apple.com/it/app/fingu/id449815506?mt=8>



Figura 4a e 4b: Comparsa degli oggetti in movimento in *Fingu* (4a) e feedback in forma di impronte lasciate quando si appoggiano dita sullo schermo (4b). Le immagini si riferiscono a due rounds diversi in cui per caso sono apparsi cinque oggetti entrambe le volte.

Feedback: per ogni dito appoggiato compare, nella posizione sullo schermo in cui lo si è appoggiato, un'impronta digitale. Entro qualche millisecondo da quando il bambino ha appoggiato un certo numero di dita simultaneamente sullo schermo l'applicativo fornisce feedback positivo o negativo, sia visivo che acustico e propone un altro round fino alla fine del livello oppure fino alla perdita di tutte le vite. Si perde una vita se il numero di dita appoggiate non corrisponde al numero di oggetti comparsi e si perde mezza vita se non si dà alcuna risposta entro lo scadere del tempo. Il riconoscimento delle dita appoggiate dal bambino avviene dopo che il bambino ha tenuto una certa configurazione di dita appoggiate per qualche millisecondo, che equivale alla "conferma" della risposta.

Analisi: la scelta di design che prevede come conferma da parte del bambino una maggiore durata del tocco corrispondente al numero di oggetti rappresentati risolve il problema di dover dare all'applicativo altri tipi di conferma. Inoltre mi sembra che questa scelta possa fissare meglio, per il bambino, la corrispondenza tra gesto e numerosità. Una scelta simile è stata fatta nel design di *Ladybug Count* nelle modalità multi-touch (non in quella di finger tap). Come in *Ladybug Count* non è importante quali dita il bambino scelga per rappresentare la numerosità proposta, ma

soltanto il numero di dita appoggiate simultaneamente sullo schermo. In generale la richiesta in *Fingu* è simile a quella nell'ambiente *Ladybug Count*, tuttavia mi sembra che il design di questo ambiente sia più funzionale al potenziamento della rappresentazione di numeri con le dita e alle abilità di subitizing rispetto a quell'ambiente. In particolare, non è consentito appoggiare in maniera sequenziale (se non in sequenza rapidissima e quasi-simultaneamente) le dita sullo schermo per rappresentare la numerosità proposta. Inoltre, seppure compaiano diversi tipi di oggetti a gruppetti simultaneamente sullo schermo (e dunque la proposta è di tipo additivo) non vengono usati in maniera impropria i segni matematici. Infine le disposizioni dei gruppetti di oggetti che compaiono (e che viaggiano in maniera autonoma mentre rimane invariante la disposizione degli oggetti all'interno di ciascun gruppetto) favoriscono processi di subitizing. Nei livelli più alti questi processi diventano complessi, in quanto i gruppetti molto spesso contengono diverse configurazioni di più di cinque oggetti e dunque per riconoscere la numerosità almeno del più numeroso dei gruppetti bisogna aggiungere mentalmente le quantità percepite mediante subitizing, magari richiamando un fatto numerico acquisito, per poi aggiungere anche la numerosità dell'altro gruppetto. Dunque in questo ambiente possono essere potenziate le abilità di subitizing e di rappresentazione di quantità con le dita, costringendo il bambino a sistemare le sue dita in maniera simultanea, modalità che la ricerca suggerisce essere la più efficace.

### *TouchCounts*

Questo applicativo, che è ancora un prototipo sperimentale, è costituito da due moduli, o sotto-ambienti in cui è possibile operare in modo diverso. Al momento l'applicativo presenta due sotto-ambienti: quello per il conteggio, rappresentato con "1, 2, 3,..." e quello additivo, rappresentato con "1+2+3+...". Per il feedback si possono scegliere al momento una di tre lingue: inglese, italiano, o francese.

### *Ambiente 1, 2, 3, ...*

Sulla schermata iniziale è possibile accedere alle impostazioni per l'ambiente "1, 2, 3, ..." scegliendo la modalità con gravità o meno o la modalità in cui è presente un "filo" sullo schermo. La modalità default prevede la gravità e la presenza del filo. L'ambiente non si presenta come gioco, ma come ambiente d'esplorazione, per cui ne descriveremo il funzionamento nella sezione "feedback".

Feedback: Quando l'applicativo riconosce il tocco sullo schermo di un dito, fa comparire un piccolo cerchietto numerato (con cifre arabe) e si sente che il numero nella pallina viene pronunciato nella lingua impostata. La gravità fa in modo che queste palline cadano sparendo dallo schermo a meno che non siano trascinate sulla linea orizzontale o "filo" nella parte superiore dello schermo. Per trascinare una pallina sul filo bisogna non staccare il dito dallo schermo quando viene prodotta la pallina, e trascinare la pallina (facendo scorrere il dito sullo schermo) fino a che si trova sopra il filo. A questo punto mollare la pallina (ossia staccare il dito dallo schermo) fa sì che la pallina si adagi sul filo. Una volta che una pallina è comparsa e si è staccato il dito dallo schermo non è possibile spostare la pallina. L'applicativo riconosce gesti di tipo multi-touch: se si tocca lo schermo con molte dita (anche tutte e dieci) simultaneamente vengono create tante palline numerate, una sotto a ciascun dito sullo schermo, e viene emessa la parola-numero che rappresenta il numero maggiore tra quelli creati, cioè l'ultimo nel conteggio del totale delle palline create. Per esempio se si inizia una sessione con il gesto di cinque dita appoggiate sullo schermo, si sentirà soltanto la parola "cinque" ma compariranno cinque palline numerate da 1 a 5.

Per ogni sessione d'interazione il conteggio e la numerazione partono da "uno" (1) e proseguono a mano a mano che nuove palline vengono create. In altre parole, in una sessione d'interazione tocchi successivi sullo schermo creano nuove palline recanti numeri sempre più alti. Quando si fa il reset della sessione il conteggio riparte da "uno" (1).

Se invece si sceglie la modalità senza gravità non compare il “filo” su cui appoggiare palline, ma le palline create rimangono tutte sullo schermo. È possibile creare palline anche parzialmente sovrapposte a palline esistenti.

Analisi: Se il bambino interagisce usando tocchi successivi con un singolo dito (anche non lo stesso di volta in volta) l’interazione può potenziare abilità di conteggio e possibilmente abilità motorie fini. Tuttavia la maggiore potenzialità di questo ambiente rispetto agli altri già presi in considerazione mi sembra essere il fatto che consente di rappresentare quantità con un singolo gesto multi-touch. In particolare al primo tocco in ciascuna sessione viene associato il suono della “parola-numero” rappresentata dal numero di dita sullo schermo e quindi di palline create. Successivamente i tocchi multi-touch sono assimilabili concettualmente a “salti in avanti” su una “linea dei numeri orale” di tante unità quante sono le palline create. Inoltre è possibile mettere in evidenza particolari palline-numero (per esempio i multipli di 2 o di 10) trascinandole sopra il filo. Questo tipo di interazione presuppone una varietà di processi cognitivi, incluso il subitizing, processi legati alla gnosis digitale, e consente un potenziamento di abilità motorie fini. Inoltre in questo ambiente potrebbero essere gettate le basi per un passaggio dall’ordinalità alla cardinalità: si può sviluppare consapevolezza della corrispondenza uno-a-uno tra numeri e dita, oppure tra numeri e successive azioni di tocco dello schermo (principio della corrispondenza-uno-a-uno); si può facilitare la memorizzazione della sequenza in cui vanno recitati i numeri nell’atto della conta (principio dell’ordine stabile); nella modalità senza gravità l’ultima “parola-numero” sentita è rappresentata dal numero totale di palline sullo schermo (principio di cardinalità); infine nella modalità con “filo” la possibilità di mettere in evidenza particolari numeri potrebbe favorire un’oggettificazione (Sfard, 2008) del numero, necessaria per il passaggio all’idea di numero cardinale.



**Figura 5** Effetto di 5 dita appoggiate simultaneamente sullo schermo nel sotto-ambiente 1, 2, 3...

### *Ambiente $1+2+3, \dots$*

**Feedback:** In questo ambiente appoggiare una o più dita sullo schermo genera gruppetti di cerchietti di uno stesso colore, che è casuale. Ciascun gruppetto reca al suo centro il numero in cifre arabe che indica il numero di cerchietti che contiene. Per esempio, toccare lo schermo con un gesto multi-touch, in cui sei dita vengono appoggiate simultaneamente, crea un gruppetto di sei cerchietti di uno stesso colore recante al centro il numero “6”. Il gruppetto fluttua lentamente sullo schermo senza interagire con altri gruppetti che può incontrare nella sua traiettoria. È possibile agire sui gruppetti fluttuanti con diversi gesti: si possono trascinare i gruppetti sullo schermo appoggiando un dito sul gruppetto e spostando il dito sullo schermo senza staccarlo; oppure si possono appoggiare simultaneamente dita su gruppetti diversi (anche su più di due) e con un gesto di “pizzicatura” si possono unire i gruppetti. Quando si agisce su due o più gruppetti, i cerchietti nel gruppetto risultante dalla fusione rimangono del loro colore originario. Infine quando due o più gruppetti sono fusi con il gesto di “pizzicatura” il gruppetto risultante reca il numero che rappresenta la somma di tutti i cerchietti contenuti e l’applicativo fornisce il feedback

acustico pronunciando la “parola-numero” scritto sul nuovo gruppetto creato.

Analisi: La rappresentazione dei gruppetti in questo sotto-ambiente favorisce un’attenzione verso la cardinalità anziché l’ordinalità dei numeri rappresentati. Infatti, attraverso il gesto di “pizzicatura” è possibile agire su numeri cardinali, in questo caso addizionandoli. Come scrivono gli stessi creatori dell’ambiente, Nathalie Sinclair e Vajiheh Sedaghat Jou (submitted), il gesto di “pizzicatura” costituisce la metafora fondamentale per l’addizione, cioè il “raccolgere insieme” (Lakoff & Núñez, 2000, in Sinclair & Jou, submitted). L’uso esplicito del gesto in questo ambiente consente inoltre di esporre il bambino all’uso di gestualità nell’apprendimento in generale (Goldin-Meadow, 2004) e in particolare nell’ambito della costruzione del significato di numero naturale. Notiamo, infine, la simmetria del gesto di “pizzicatura”.



**Figura 6a e 6b:** Effetto della “pizzicatura” per fondere due gruppetti di 4 e 3 cerchietti, rispettivamente, nel sotto-ambiente  $1+2+3, \dots$

La scelta di design che prevede che i cerchietti nel gruppetto risultante dalla fusione rimangano del loro colore originario fa sì che rimanga traccia della costruzione del gruppetto-somma e in questo modo favorisce l’abilità fondamentale di “counting-on”.

In definitiva, è chiaro come i sotto-ambienti siano stati creati in modo da favorire un’evoluzione del senso del numero da aspetti

ordinali verso la concettualizzazione di aspetti cardinali dei numeri. Dall'analisi, risulta anche come il design di questo ambiente presenti molte potenzialità interessanti rispetto a quanto la letteratura indica come fondamentale per la costruzione del significato di numero naturale.

## **Conclusioni**

Dall'analisi degli applicativi descritti, risulta che stiano nascendo ambienti il cui design sfrutta interessanti potenzialità offerte dalla tecnologia multi-touch per favorire lo sviluppo di abilità numeriche. Alcuni di questi applicativi sono usati in studi scientifici miranti a confermarne o meno le potenzialità didattiche. Spero di riuscire a raggiungere presto conferme significative all'ipotesi che ho presentato in questo lavoro e cioè che sia possibile sfruttare in modo efficace la funzionalità offerta dalle tecnologie multi-touch che prevede il riconoscimento di una varietà di gesti-tocco eseguiti anche simultaneamente, in particolare per quel che riguarda la sperimentazione con *TouchCounts*. Inoltre mi auguro di venire presto a conoscenza di risultati incoraggianti dalle sperimentazioni in atto con applicativi che non ho ancora potuto analizzare, come *DOPPELMOPPEL*.

Quello che mi sento di affermare con molta convinzione è che la tecnologia multi-touch ha aperto una nuova frontiera nell'uso di applicativi per la didattica della matematica in quanto sembra mettere a disposizione un nuovo canale per il potenziamento di particolari abilità cognitive che sono alla base dell'insegnamento-apprendimento. Per tale motivo è bene che diventi sempre più oggetto di ricerca didattica e di sperimentazione nelle aule scolastiche .

## Bibliografia

- Anderson, M. L., & Penner-Wilger, M. (2007). Do redeployed finger representations underlie math ability? In D. S. McNamara & J. G. Trafton (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Cognitive Science Society* (p. 1703). Austin, TX: Cognitive Science Society.
- Andres, M., Seron, X., & Oliver, E. (2007). Contribution of hand motor circuits to counting. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *19*, 563 – 576.
- Bafalluy, M.G. & Noël, M.P. (2008). Does finger training increase young children's numerical performance? *Cortex*, *44*, online.
- Benoit, L., Lehalle, H., & Jouen, F. (2004). Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development*, *19*, 291-307.
- Barnes, M.A., Smith-Chant, B. L., & Landry, S. (2005). Number processing in neurodevelopmental disorders: Spina bifida myelomenigocele. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition*. New York, NY: Psychology Press.
- Brissiaud, R. (1992). A Toll for Number Construction: Finger Symbol Sets. In J. Bidaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (eds.). *Pathways to number. Children's Developing Numerical Abilities*. New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates.
- Butterworth, B. (1999a). *What counts - how every brain is hardwired for math*. New York, NY: The Free Press.
- Butterworth, B. (1999b). *The mathematical brain*. London: Macmillan.
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *46*, 3-18.
- Clements, D.H. (2002). Computers in Early Childhood Mathematics. *Contemporary Issues in Early Childhood*, Volume 3, Number 2, 2002.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford: Oxford Press.

- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487-506.
- Fayol, M., & Seron, X. (2005). About numerical representations: Insights from neuropsychological, experimental, and developmental studies. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology Press.
- Fayol, M., Barrouillet, P., & Marinthe, C. (1998). Predicting arithmetical achievement from neuro-psychological performance: A longitudinal study. *Cognition*, 68, B63- B70
- Fischer J.P. (1987). L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie*, 80, 17-24.
- Fuson, K.C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer.
- Fuson, K.C. (1992). Research on Learning and Teaching Addition and Subtraction of Whole Numbers. In G. Leinhardt, R. Putnam & R.A. Hattrup (eds.). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates. 53-187.
- Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University press
- Goldin-Meadow, S. (2004). Gesture's role in the learning process. *Theory into Practice* 43(4), 314-321.
- Kay, A. (1972). A Personal Computer for Children of All Ages. In: *Proceedings of the ACM National Conference*.
- Ladel, S. and Kortenkamp, U. (2009). Realisations of MERS (multiple extern representations) and MELRS (multiple equivalent linked representations) in elementary mathematics software. In: Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S., and Arzarello, F., editors, *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon (France).
- Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2011). Implementation of a multi-touch-environment supporting finger symbol sets. In *Proceedings of the Seventh Congress of the European*

- Society for Research in Mathematics Education. Rzeszow, Poland.*
- Lucangeli, D., De Candia, C., Poli, S. (2003). *L'Intelligenza numerica, Vol. 3.* Erickson.
- Mayer, R. (ed.) (2005). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning.* Cambridge University Press. New York.
- Marie-Pascale Noël, MP. (2005). Finger gnosis: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, 11: 1–18.
- Nunes, T., Bryant, P. & Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning: Understanding extensive quantities and whole numbers.* Nuffield Foundation. [Available: <http://foundation.bootle.biz/sites/default/files/P2.pdf>].
- Penner-Wilger, M., Fast, L., LeFevre, J.A., Smith-Chant, B.L., Skwarchuk, S.L, Kamawar, D., & Bisanz, J. (2007). The Foundations of Numeracy: Subitizing, Finger Gnosis, and Fine Motor Ability. In D. S. McNamara & J. G. Trafton (Eds.), *Proceedings of the 29th annual conference of the cognitive science society.* Austin, TX: Cognitive Science Society. pp. 1385-1390.
- Resnick, L.B., Bill, V., Lesgold, S. & Leer, M. (1991). Thinking in arithmetic class. In B. Means, C. Chelemer & M.S. Knapp (ed.). *Teaching advanced skills to at-risk students: Views from research and practice* (pp. 27-53). San Francisco: Jossey-Bass.
- Sato, M., Cattaneo L., Rizzolatti, G., Gallese, V. (2007). Numbers within our hands: Modulation of corticospinal excitability of hand muscles during numerical judgment. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 19(4), 684–93.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York: Cambridge University Press.
- Sinclair, N. & Jou, V.S. (submitted). Finger counting and adding on a touchscreen mathematical instrument. Submitted for the

- Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Anatolya (Turkey).
- Sun, X. (2011). “Variation problems” and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*, 76 (1), 65-85.
- Thompson, P.W. (1992). Notations, conventions and constraints: contributions to effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23 (2), 123-147.
- Thompson J. C., Abbott, D. F., Wheaton, K. J., Syngeniotes, A. & Puce. A. (2004). Digit representation is more than just hand waving. *Cognitive Brain Research*, 21, 412–17.
- Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52(2), 83-94. doi:10.1159/000202727.