



## 'Tanto quanto' a cavallo tra discreto e continuo

Anna BACCAGLINI-FRANK<sup>1</sup>, Francesca MARTIGNONE<sup>1</sup>, Maria MELLONE<sup>2</sup>

### Riassunto

*In questo articolo presentiamo i primi risultati di una ricerca di tipo qualitativo il cui obiettivo è identificare e analizzare le risposte di bambini (nei primi mesi della scuola primaria) alla richiesta di generare quantità simili di una sostanza che può essere trattata come discreta o continua: il riso. Le informazioni ricavate da queste analisi saranno utilizzate per progettare attività didattiche per l'introduzione al concetto di misura.*

### Introduzione e quadro teorico di riferimento

Nelle più recenti indicazioni per il curriculum della scuola italiana (MIUR, 2012), nella sezione 'la conoscenza del mondo', viene così sottolineata la centralità delle operazioni di conteggio e misura:

“[Il bambino] *Ha familiarità sia con le strategie del contare e dell'operare con i numeri sia con quelle necessarie per eseguire le prime misurazioni di lunghezze, pesi, e altre quantità*” (MIUR, 2012, p. 23).

Inoltre anche a livello internazionale la misura è considerata tra gli argomenti fondamentali da sviluppare per imparare 'a pensare matematicamente' (NCTM, 2000; OCSE, 2010). L'enfasi data alla misura, come concetto fondante nei programmi scolastici di matematica, è anche dovuta al ruolo speciale e pervasivo che essa riveste in molti aspetti della vita pratica e sociale. La misurazione di quantità è, infatti, un'azione comune nella nostra vita quotidiana, sebbene sia un'operazione sofisticata sul piano dell'azione e dell'astrazione. Per misurare una quantità si deve innanzitutto scegliere un'unità di misura: si tratta di valutare, sia in termini di opportunità che di comodità, il campione più adatto in rapporto alla quantità da misurare, per poi contare quante volte questa unità è contenuta nella quantità da misurare, ed anche in questo caso è necessaria una complessa valutazione dell'approssimazione lecita a seconda dello scopo della misura. Questa complessa procedura e le sue connessioni con il numero hanno rappresentato uno degli elementi cruciali di innesco nella nostra evoluzione sociale e culturale (ALEKSANDROV & KOLMOGOROV & LAVRENTEV, 1974).

Storicamente e pedagogicamente i numeri (naturali) sono visti in primo luogo come strumenti per contare. Il processo di conteggio è stato oggetto di profonde indagini da parte, ad esempio, di (GELMAN & GALLISTEL, 1978) che lo hanno descritto attraverso cinque prin-

<sup>1</sup> Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, Università di Modena e Reggio Emilia

<sup>2</sup> Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli Federico II

cipi: *principii di Iniettività, dell'Ordine Stabile, di Cardinalità, di Astrazione, di Irrelevanza d'Ordine*. Questi principi hanno il merito di descrivere con cura le azioni (psicologiche e pratiche) implicate nel processo di conteggio e di fornire, allo stesso tempo, utili strumenti per rilevare particolari difficoltà che i bambini possono incontrare in questa attività. In generale possiamo affermare che in didattica della matematica la maggioranza degli approcci conferiscono, con piccole differenze, un ruolo primitivo e prioritario ai numeri naturali e all'azione di conteggio di grandezze discrete (IANNECE & MELLONE & TORTORA, 2009). La gestione di questo tipo di grandezze consiste comunemente nel contare le entità di cui esse sono composte. Per questa ragione la tradizione occidentale tende ad introdurre i numeri naturali prima della misura. Per esempio, (SFARD, 1991) propone una ricostruzione del concetto di numero attraverso la dialettica processo/oggetto, dove il processo di conteggio costituisce il punto di partenza, mentre la misura appare solo ad un passo successivo per introdurre i numeri razionali.

Un approccio diverso è presentato dallo psicologo russo (DAVYDOV, 1982), il quale colloca l'esperienza di confronto e misurazione di quantità continue (liquidi, estensioni spaziali, ...) prima dell'introduzione del numero. Nella sua prospettiva, lo stesso conteggio è concepito come un particolare processo di misura di collezioni di oggetti discreti. Davydov suggerisce quindi che all'inizio del percorso di educazione matematica i bambini dovrebbero fare esperienza con confronti e gestioni di quantità continue prima di incontrare i numeri naturali. In ambito internazionale sono attivi alcuni interessanti progetti di ricerca che prendono ispirazione da questo approccio, uno tra tutti il progetto 'MEASURE-UP' sviluppato presso l'Università di Manoa (Hawaii, USA) (ad es., DOUGHERTY & SLOVIN, 2004).

In questo quadro è evidente quanto la misura, ed i suoi legami con i numeri, costituiscano una pratica culturale complessa ed è per questa ragione che crediamo necessario tornare a riflettere sui modi e le opportunità di introdurla a scuola, in modo da sviluppare una gestione consapevole e critica di uno strumento tanto potente quanto incorporato implicitamente nella vita tecnologica e sociale cui partecipiamo. In particolare pensiamo che le condizioni pedagogiche e didattiche da creare per introdurre la misura a scuola debbano ispirarsi ed essere coordinate con le intuizioni che i bambini hanno verso la gestione di quantità. Con questo intento abbiamo condotto uno studio esplorativo al fine di acquisire informazioni sulle strategie messe in atto da bambini all'inizio della prima elementare, nel valutare quantità di una sostanza a cavallo tra continuo e discreto: il riso.

L'idea di utilizzare questo tipo di sostanza è legata ad alcune evidenze provenienti sia dal campo delle neuroscienze che della psicologia, nelle quali all'origine delle intuizioni numeriche negli esseri umani viene riconosciuto una forte legame tra la gestione di quantità continue non numerabili e grandi quantità di oggetti discreti, numerabili (PIAZZA, 2010; GELMAN & GALLISTEL, 2006). In questo articolo presentiamo alcuni risultati iniziali di questo studio, provenienti da un'analisi qualitativa delle videoregistrazioni di attività svolte da bambini nei primi mesi della prima elementare che affrontano il compito di formare quantità uguali di riso. Riconoscendo il ruolo cruciale degli artefatti sia a livello psicologico che

sociale (VYGOTSKY, 1978) e sperando che esso ci aiutasse ad illuminare le competenze mobilitate nell'approccio a questo compito, abbiamo anche offerto ai bambini la possibilità di utilizzare diversi artefatti. Qui riportiamo questo primo passo della nostra ricerca in cui sono stati identificati alcuni comportamenti ricorrenti sviluppati dai bambini nella risoluzione del compito. Per questa analisi cognitiva ci siamo riferiti alla nozione di schema data da Vergnaud come "*organizzazioni invariante di attività per una certa classe di situazioni*" (VERGNAUD, 2009, p. 88) ed agli studi teorici provenienti dall'ambito dell'Ergonomia Cognitiva di Rabardel (RABARDEL, 1995; BÉGUIN & RABARDEL, 2000). Secondo Rabardel, un soggetto impegnato in un'attività con obiettivo specifico usando un artefatto, può costruire schemi d'utilizzo dell'artefatto, validi per una classe di situazioni. Gli schemi possono emergere come costruzioni personali e innovative, oppure come appropriazione da parte del soggetto di schemi sociali preesistenti. In questo articolo, dopo aver descritto la metodologia seguita, presenteremo gli schemi osservati analizzandoli alla luce degli studi di riferimento sopra citati e aprendo poi prospettive su possibili ricadute didattiche e su ulteriori ricerche legate a recenti risultati provenienti dalle neuroscienze.

## Metodologia

Come esplicitato nel paragrafo precedente, il nostro studio esplorativo ha avuto lo obiettivo di acquisire informazioni sui comportamenti sviluppati da bambini all'inizio della prima elementare nel confrontare quantità di riso. Il primo passo della nostra ricerca è stato l'osservazione di bambini in un contesto di lavoro che permettesse di individuare le strategie attivate per la gestione di questa sostanza, che solitamente viene trattata come continuo, ma che si presta anche ad essere trattata come costituita da singole entità discrete. Abbiamo quindi intervistato 19 bambini di prima elementare durante il secondo mese di scuola, uno alla volta, attraverso delle interviste cliniche (HUNTING, 1997). Il contesto sperimentale è stato costruito nel modo seguente: l'intervistatrice (una delle autrici) prendeva da una busta contenente  $\frac{1}{2}$  kg di riso una piccola manciata, che dopo uno studio pilota abbiamo deciso di circa 200 chicchi e, dopo averla appoggiata sul tavolo, chiedeva al bambino "*potresti darmene tanto quanto ne hai tu?*" e poi "*come fai ad essere sicuro che ce n'è tanto qui quanto qui* [indicando i due mucchietti]?". Il numero approssimativo di chicchi è stato scelto in modo che diverse possibili strategie potessero emergere, in particolare anche quella di contare i chicchi presenti in ciascun mucchietto. Come detto precedentemente nella nostra prospettiva l'uso di artefatti gioca un ruolo fondamentale, quindi dopo la prima richiesta, l'intervistatrice ha offerto ai bambini diversi artefatti in modo che, se lo avessero ritenuto opportuno, potevano sceglierne uno (o più) per rispondere in maniera più soddisfacente alla seconda domanda ("*come fai ad essere sicuro che ce n'è tanto qui quanto qui ?*" [indicando i due mucchietti]). Introducendo alcuni artefatti, eravamo interessati a vedere se i bambini conoscevano o generavano particolari schemi d'utilizzo di determinati artefatti per gestire sostanze continue oppure preferivano schemi

adatti alla gestione di sostanze discrete, come il conteggio. Gli artefatti che abbiamo proposto sono stati: un cucchiaino, dei bicchieri di plastica trasparente, delle cannucce, un righello, carta e penna. Le motivazioni che ci hanno spinto a scegliere tali artefatti sono le seguenti:

- il cucchiaino può essere utile per cercare di misurare il riso a 'cucchiaiate', trattandolo come sostanza continua, possibilmente richiamando schemi acquisiti fuori dall'ambito scolastico;
- i bicchieri di plastica possono essere utili per paragonare le quantità di riso utilizzando il volume costante di contenitori uguali (come per i liquidi);
- le cannucce potevano essere usate, come riscontrate in uno studio precedente (MELLONE, 2008) 'per allineare' i chicchi del mucchio per poi cercare di misurare il riso in 'cannuciate';
- il righello poteva essere uno strumento conosciuto dai bambini utile per misurare una dimensione di disposizioni bi/tri/dimensionali di riso;
- la penna e la carta potevano servire ai bambini per scrivere o disegnare qualsiasi cosa ritenessero utile (per esempio, per tenere traccia di eventuali processi di conteggio, o di una misurazione).

L'intervistatrice ha messo tutti gli artefatti davanti al bambino, ma non ha insistito per farli usare ai bambini.

## Analisi e discussione

L'analisi delle videoregistrazioni ci ha permesso di identificare alcuni comportamenti invariati (schemi) (VERGNAUD, 2009) attivati dai bambini di fronte alle due richieste dell'intervistatore riferite ad un piccolo mucchietto di riso: "*potresti darmene tanto quanto ne hai tu?*" e poi "*come fai ad essere sicuro che ce n'è tanto qui quanto qui?*" [indicando il mucchietto iniziale e quello formato dal bambino]. In questo paragrafo presenteremo gli schemi identificati come prototipici descrivendo le azioni e le corrispondenti espressioni linguistiche verbali usate per accompagnare le azioni (estratti dalle trascrizioni delle interviste).

### a) La mano come un cucchiaino



Figura 1

Schema: Prendere dal sacchetto con mani a cucchiaino (Fig. 1).

Estratti dalle interviste: "*Perché ho sentito*".

Commento: Schema guidato da sensazione tattile.

### b) Bilanciamento a occhio.

Schema: Cercare di bilanciare visivamente le quantità.

Estratti dalle interviste: "*ne metto un altro po' qui così sono uguali un po' di più*"

Commento: Schema guidato dalla vista.

### c) Conteggio



Figura 2

Schema: Contare i chicchi di riso (Fig. 2).

Estratti dalle interviste: “contandoli”; “li conto”.

Commento: Schema che implica da parte del bambino di capacità e sicurezza nel contare quantità anche grandi di entità discrete, nonostante il grado scolare (Fig. 2).

### d) Confronto di forme



Figura 3



Figura 4

Schemi: confrontare le dimensioni delle forme tridimensionali; appiattire i mucchietti e vedere superficie occupata; confrontare le altezze dei mucchietti (Fig. 3 e Fig. 4).

Estratti dalle interviste: “un po’ rotondino che sembra uguale”; “è andato un po’ su qua e è andato un po’ su qua”; “ho guardato quanto è grosso”; “è più ciccione”.

Commento: Schemi per valutare la quantità attraverso l’analisi visiva di forme simili e il confronto delle dimensioni dei mucchietti.

La maggioranza degli schemi identificati (tutti tranne lo schema c) mostra come i bambini, alla richiesta di creare una quantità di riso uguale a una data, gestiscano il riso come una quantità continua. Per rispondere alla richiesta di generare un mucchietto di riso che sia ‘tanto quanto’ quello dato sono quindi guidati da sensazioni e impressioni visive e tattili.

In seguito l’intervistatore ha proposto agli alunni una serie di artefatti (righello, cucchiaino, bicchiere di plastica, cannuce, carta e penna) da utilizzare solo nel caso lo ritenessero utile. I bambini hanno quindi sviluppato ulteriori schemi che, in questo caso, si avvalgono dell’uso di specifici artefatti. Anche questi schemi saranno etichettati attraverso la descrizione delle azioni e dalle frasi pronunciate dai bambini mentre agivano sul riso.

e) **Righello per confrontare**



Figura 5



Figura 6

Artefatto e schemi d'utilizzo scelti: il righello è usato come asse di simmetria (come una bilancia visiva) per controllare se le quantità sono uguali (Fig. 5 e Fig. 6).

Estratti dalle interviste: *“Li potrei mettere in fila in questo modo così poi dopo riesco a saper la misura, se sono uguali oppure se sono diversi?”.*

Commento: Il righello è strumento usato come asse di simmetria per posizionare le due quantità di riso in modo da controllarne almeno una dimensione e poi confrontarne le forme. Gli alunni parlano di misura, ma non usano la scala graduata del righello (la cui progressione dei numeri è diversa sui due lati).

f) **Righello per esplorare una dimensione**



Figura 7

Artefatto e schemi d'utilizzo scelti: La scala graduata del righello è usata per misurare una dimensione (Fig. 7).

Estratti dalle interviste: *“leggo sul righello ... vedo numeri uguali”.*

Commento: Il righello è usato con lo schema di utilizzo appreso (culturale) per misurare dimensioni lineari.

g) **Bicchieri come contenitori di forme simili**

Artefatto e schemi d'utilizzo scelti: I contenitori (uguali) sono usati per dare forme simili e quindi confrontabili.

Estratti dalle interviste: *“li ho messi dentro e ho guardato se il mucchietto era uguale”.*

Commento: Il bicchiere è usato come volume stabile (formina usando un termine infantile) per generare volumi uguali a sostegno dell'uguaglianza delle quantità rilevate.

## h) Bicchiere per controllare una dimensione



Figura 8

Artefatto e schemi d'utilizzo scelti: I contenitori (uguali) sono usati per controllare una sola dimensione, l'altezza della quantità di riso al loro interno (Fig. 8).

Estratti dalle interviste: "Sono alti uguali".

Commento: i bicchieri sono usati per fissare una dimensione (l'uguale sezione) per poi confrontare le altezze del riso al loro interno.

I diversi schemi individuati sono stati analizzati tenendo conto dell'analisi a priori svolta e degli studi presi in considerazione nel quadro teorico di riferimento della ricerca. Come previsto, lo schema in cui si sviluppa il conteggio dei chicchi (c) è usato solo dai bambini che, nonostante il grado scolare (primi mesi della I elementare), si sentono in grado e hanno le capacità per gestire le difficoltà implicate nel conteggio di grandi quantità (GELMAN & GALLISTEL, 1978). Questi bambini poi non usano gli artefatti proposti, se non carta e penna per scrivere il numero dei chicchi, perché non sentono la necessità di usare ulteriori artefatti per controllare se la loro risposta è corretta. In tutti gli altri schemi identificati nel nostro studio, il riso è trattato come una quantità continua. Come abbiamo già sottolineato nella prima parte le valutazioni sull'uguaglianza delle quantità di riso si basano soprattutto su considerazioni guidate da sensazioni tattili o visive. Quando sono forniti gli artefatti, questi sono utilizzati per controllare le quantità attraverso il controllo delle forme assunte dal riso. Una strategia particolarmente interessante che abbiamo osservato fa uso del righello come asse di simmetria per bilanciare le quantità (e). In questo caso il righello non è usato seguendo gli schemi solitamente associati a questo artefatto, ma schemi d'utilizzo elaborati dai bambini per quella specifica situazione. In un altro schema che utilizza il righello (f) invece questo è usato per misurare (la lunghezza in cm) di una dimensione lineare della forma assunta dal riso. Altri schemi hanno come obiettivo la gestione delle quantità di riso attraverso la manipolazione e il confronto delle forme assunte dai mucchietti: ad esempio appiattendolo (d) o controllando le dimensioni attraverso dei contenitori (g e h). In questo modo possono gestire le tre dimensioni dei mucchietti fissandone una o dando una forma comune ad entrambi i mucchietti. Schemi simili sono stati notati in studi precedenti (MELLONE, 2008).

I bambini che hanno usato questi schemi sembrano interpretare 'la stessa quantità' come 'la stessa forma occupata' sul piano o nello spazio. Questa idea viene utilizzata anche in una delle attività proposte da Davydov (1982) per la gestione di quantità continue: i bambini sono invitati a confrontare due diverse quantità di acqua in due cilindri identici dati dal docente. L'analisi degli schemi d'uso individuati mostra che molti bambini sembrano

essere nella zona di sviluppo prossimale (VYGOTSKIJ, 1987) riguardo l'idea di poter ridurre la complessità del confronto tra due quantità continue ponendole, ad esempio, in due contenitori uguali. Infatti, come documentato nell'analisi, la maggior parte dei bambini agisce in modo da semplificare la complessità del confronto tra le due quantità di riso operando su di esse in modo da concentrarsi solo su una delle loro proprietà (numerosità, lunghezza, superficie o volume).

### **Prospettive future**

Alla luce dei risultati di questa ricerca, il nostro intento è di progettare un intervento didattico fondato sul quadro della mediazione semiotica (BARTOLINI BUSSI & MARIOTTI, 2009), in cui l'insegnante, sulla base delle intuizioni dei bambini riconosciute in questo studio, possa sviluppare un approccio più formale e culturale alla misura ed ai significati matematici ad essa connessa. Inoltre, l'idea è di intrecciare questo intervento didattico con altre attività che coinvolgono i numeri in modo da ampliare i significati matematici costruiti. A questo scopo stiamo analizzando le possibili relazioni tra gli schemi dei bambini osservati prima della proposta di utilizzare gli artefatti e quelli coinvolti nel loro utilizzo (ad esempio lo schema (a) la mano come cucchiaino, con lo schema (h) i bicchieri di plastica).

Infine, per quanto sia al di là degli scopi di questa ricerca, abbiamo notato che molti degli schemi riconosciuti, in particolare quelli basati sul confronto delle proprietà spaziali dei mucchietti di riso, rimandano alle abilità innate riconosciute in ambito neuroscientifico, riguardanti la manipolazione di grandezze non simboliche (per es. insiemi di punti) e alla valutazione approssimata di estensioni spaziali. Questa osservazione potrebbe essere molto preziosa ai fini degli sviluppi didattici successivi, infatti, come evidenziato in (PIAZZA, 2010), ci sono evidenze di collegamenti esistenti tra queste abilità e quelle che riguardano la gestione di simboli numerici: un potenziamento delle abilità di gestione di quantità e del senso approssimato delle estensioni spaziali possano contribuire allo sviluppo di mappe neurali che fortificano i significati dei simboli numerici e conseguentemente fortificano le abilità matematiche connesse ad essi.



## Bibliografia

- ALEXANDROV A.D. & KOLMOGOROV A.N. & LAVRENTEV M.A., 1974, *Le Matematiche*, Torino: Bollati Boringhieri.
- BARTOLINI BUSSI M.G. & MARIOTTI M.A., 2009, *Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij*, In: L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Paderno del Grappa (TV): CRD "Ugo Morin", 32 A-B, pp. 270 - 294.
- BÈGUIN P. & RABARDEL P., 2000, *Designing for instrument-mediated activity*, Las Vegas, NV (USA): Scandinavian Journal of Information Systems, n. 12, pp. 173 - 190.
- DAVYDOV V.V., 1982, *The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children*, In: T.P. CARPENTER et alii (eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective*, Hillsdale NJ (USA): Lawrence Erlbaum, pp. 224 - 238.
- DOUGHERTY B.J. & SLOVIN H., 2004, *Generalized diagrams as a tool for young children's problem solving*, In: M. JOHNSEN-HØINES & A.B. FUGELSTAD (eds.), *Proc. of the 28th Conf. of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen (Norway): Bergen University College, Vol. 2, pp. 295 - 302.
- GALLISTEL C.R. & GELMAN R. & S. CORDES, 2006, *The cultural and evolutionary history of the real numbers*, In: S. LEVINSON & P. JAISSON (eds.), *Evolution and Culture: A Fyssen Foundation Symposium*, Cambridge MA (USA): MIT Press, pp. 247 - 274.
- GELMAN R. & GALLISTEL C.R., 1978, *The child's understanding of number*, London: Harvard University Press.
- HUNTING R.P., 1997, *Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice*, Journal of Mathematical Behavior, New Brunswick, NJ (USA): Elsevier, 16(2), pp. 145 - 165.
- IANNECE D. & MELLONE M. & TORTORA R., 2009, *Counting vs. measuring: reflections on number roots between epistemology and neuroscience*, In: M. TZEKAKI & M. KALDRIMIDOU & H. SAKONIDI (eds.), *Proc. of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Thessaloniki, Greece: PME, Vol. 3, pp. 209 - 216.
- NCTM [National Council of Teachers of Mathematics], 2000, *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: NCTM.
- PIAZZA M., 2010, *Neurocognitive startup tools for symbolic number representations*, Trends in Cognitive Science, Special Issue, London (UK): Elsevier Ltd., 14, p. 542.
- RABARDEL P., 1995, *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*, Paris : A. Colin.
- SFARD A., 1991, *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, Neu-Isenburg (GER): Sperlberg ed., 22, pp. 1 - 36.
- VERGNAUD G., 2009, *The Theory of Conceptual Fields*, Human Devices 52, Berlin: Karger ed., pp. 83 - 94.
- VYGOTSKY L.S., 1987, *Il Processo Cognitivo*, Torino: Bollati-Boringheri.

## WEBgrafia

- MELLONE M., 2008, *Un progetto didattico innovativo sulle strutture aritmetiche*, [tesi di dottorato non pubblicata], Università "Federico II", Napoli, reperibile dal Gennaio 2013 sul sito:  
[http://math.unipa.it/~grim/Tesi\\_Dott\\_MariaMellone\\_08.pdf](http://math.unipa.it/~grim/Tesi_Dott_MariaMellone_08.pdf)

BACCAGLINI-FRANK, MARTIGNONE, MELLONE - *'Tanto quanto' a cavallo tra discreto e continuo*

MIUR, 2012, Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, reperibile da Gennaio 2013 su: <http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/>

OECD (Organisation for Economic Cooperation and Development), 2010, *PISA 2012 Mathematics framework*, reperibile dal Gennaio 2013 su: <http://www.pisa.oecd.org>